



Kompletterande teorimaterial till kursen

Ljud i byggnad och samhälle

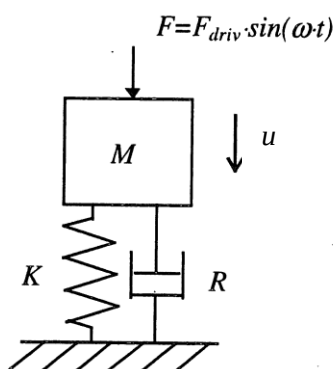
VTAF01

Teknisk akustik, LTH

1. Enfrihetsgradssystem
2. Vågutbredning
3. Transmission och reflektion

1. Enfrihetsgradssystemet – SDOF

Det enkla massa-fjäder-systemet, eller sdof-systemet (*single-degree-of-freedom*, enfrihetsgradssystem) är ett grundläggande begrepp inom akustik och mekanik. Med god förståelse för detta har man ett värdefullt verktyg för att analysera resonanta system. Man kan till exempel se en plattas svängningsformer, moder, som sdof-system. I enkla fall ser man dessa som enskilda system som eventuellt är kopplade till varandra, mdof-system (*multi-degree-of-freedom*, flerfrihetsgradssystem). SDOF-system är också viktigt för att förstå hur vibrationsisolering fungerar.

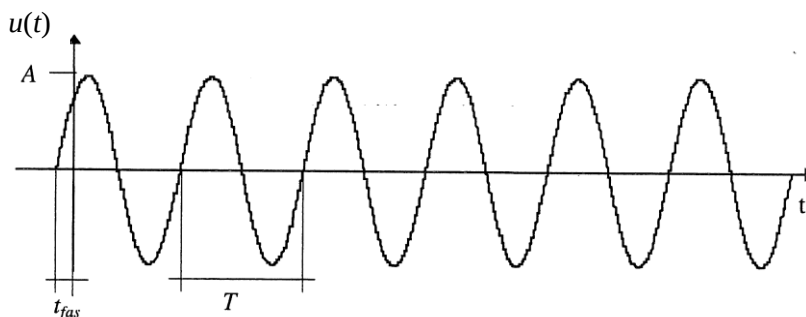


Figur 1 SDOF, enkelfrihetsgradssystem

Vi ska i detta kapitel härleda och lösa ekvationerna för det enkla massa-fjädersystemet, samt introducera vissa begrepp som vi kommer att behöva längre fram i kursen.

Inledande samband

Innan vi börjar ska vi behandla några få grundläggande samband när det gäller harmoniska funktioner. Vi tänker oss ett godtyckligt harmoniskt tidsförlopp.



Figur 2 Harmoniskt tidsförlopp

I Figur 2 ser vi tidsförloppet, där T är periodtid, A är amplitud, $u(t)$ är någon variabel, exempelvis förskjutningen som funktion av tiden, och t_{fas} är en fastid. Matematiskt kan man skriva tidsförloppet som:



$$u(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \alpha\right) \quad (1)$$

Fasändringen är här beskriven med en fasvinkel α . En enkel jämförelse mellan fastiden t_{fas} och fasvinkeln α ger att

$$\alpha = t_{fas} \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Om vi istället för periodtid introducerar frekvens f , enhet $1/s = \text{Hz}$, så att:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

så kan vi skriva lite lättare:

$$u(t) = A \cos(2\pi f t - \alpha) \quad (4)$$

Vanligen introducerar man även en vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$, ("omega") med enheten rad/s . Då har vi:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) \quad (5)$$

Istället för en cosinusfunktion kan tidsförloppet beskrivas med en sinusfunktion:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) = A \sin(\omega t - \alpha + \pi/2) = A \sin(\omega t - \beta) \quad (6)$$

där β är en ny fasvinkel, förskjuten 90° från α . Man kan också beskriva tidsförloppet med både en sinus och en cosinus:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad (7)$$

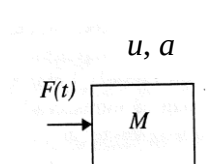
Nu börjar vi med det enkla svängningssystemet.

Ekvation i tidsled

Diskreta komponenter

Från Byggnadsmekanikens avsnitt om dynamik (kap 14 i Introduktion till strukturmekaniken) har vi stött på sdof-systemets tre olika komponenter, massa, fjäder och dämpare.

1. Massa



Figur 3 Massan

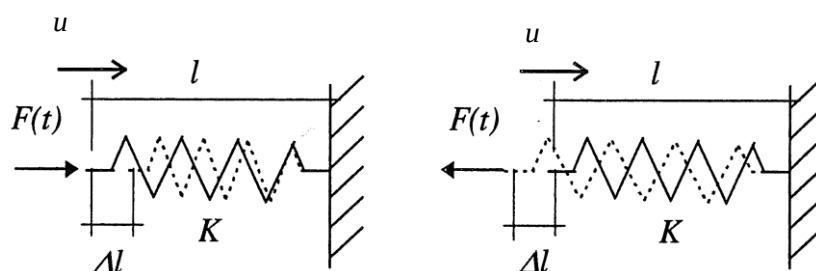


För en stel kropp med massa M gäller enligt Newtons röreslag att $F = M \cdot a$, där F är en pålagd kraft och a är stelkroppens acceleration:

$$a(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \ddot{u}(t) \quad (8)$$

Stelkroppen har samma förskjutning i alla punkter, och om vi tänker oss förskjutningar i endast en dimension kan den därför representeras med en frihetsgrad¹. Massan är således en punktmassa.

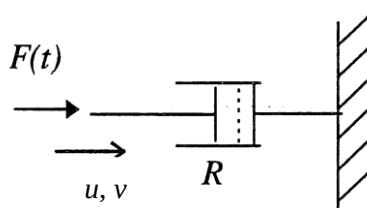
2. Fjäder



Figur 4a Fjädern

En deformation Δl av en ideal (linjär och masslös) fjäder, med längden l (i viloläge) och fjäderkonstant K , svarar mot en kraft $F = K\Delta l$, proportionellt mot fjäderns deformation. Då vi i detta första exempel ännu bara har en frihetsgrad, belägen vid massan, kan deformationen beskrivas av förskjutningen vid denna frihetsgrad, och därmed är kraften proportionell mot förskjutningen, $F = Ku$.

3. Dämpare



Figur 4b. Dämparen

En ideal dämpare, med dämpkonstanten R , svarar mot en kraft $F = R\Delta v$ om den trycks samman eller sträcks ut med en deformationshastighet Δv (deformationshastighet relativt väggen). Om vi har en frihetsgrad så gäller på samma sätt som innan att $F = Rv$

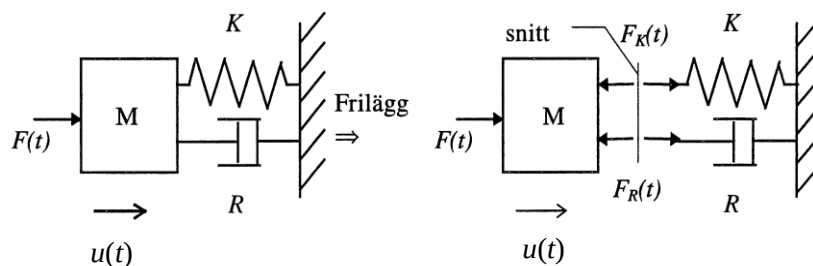
¹ Frihetsgraden representeras av förskjutningen u , vilket skall betecknas som en förskjutning runt en jämviktspunkt (eller arbetspunkt). Vi använder inte beteckningen x eller x_1 då vi behöver denna beteckning som koordinat längre fram när vi diskuterar vågutbredning



$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) \quad (9)$$

Newtons rörelselag

Vi kan nu kombinera de tre elementen till ett massa-fjäder system. För att till en början slippa tyngdkraften² låter vi svängande systemet vibrera, eller svänga, horisontellt. Vidare är systemet påverkat av en yttre drivande kraft $F(t)$.



Figur 5 Friläggning av massan

I varje ögonblick måste Newtons rörelselag vara uppfyllt, d v s:

$$(\rightarrow) \quad F(t) - F_K(t) - F_R(t) = Ma(t) \quad (10)$$

Vi sätter in uttrycken för fjäderkraften och dämpkraften enligt punkt 2 och 3 ovan:

$$F(t) - Ku(t) - Rv(t) = Ma(t) \quad (11)$$

$\Leftrightarrow$

$$Ma(t) + Rv(t) + Ku(t) = F(t)$$

$\Leftrightarrow$

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (12)$$

Den sist använda formen av uttrycket är vanligt förekommande, och är praktisk då förskjutningen u är den obekanta variabeln.

Lösning

Den allmänna lösning av ekvationen ovan har getts exempelvis i boken *Analys i en variabel* och består av en homogen lösning och en partikulär lösning. Den homogena lösningen består av en exponentiellt avklingande

² Denna har dock ingen betydelse, som vi kommer att se senare, tyngdkraften ger en statisk förskjutning som bara flyttar arbetspunkten.



harmonisk svängning³, medan partikulärlösningen består av en harmonisk svängning med samma frekvens som drivningen, men eventuellt fasförskjuten till denna. Det finns några olika ekvivalenta begrepp för de båda lösningarna:

Partikulär	Homogen
Tvungen,	Fri
Steady	Transient

Tabell 1 Ekvivalenta namn

För tydlighetens skull visar vi hur man tar fram dessa lösningar även här.

Homogen lösning:

$$M\ddot{u}_h(t) + R\dot{u}_h(t) + Ku_h(t) = 0 \quad (13)$$

$\Leftrightarrow$

$$\ddot{u}_h(t) + \frac{R}{M}\dot{u}_h(t) + \frac{K}{M}u_h(t) = 0 \quad (14)$$

Vi introducerar nu några hjälpstorheter:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (15)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (16)$$

$$\eta = \frac{R}{\sqrt{MK}} = 2\zeta \quad (17)$$

där ω_0 är den odämpade egenfrekvensen (egentligen *egenvinkelfrekvensen* med enheten rad/s), f_0 är den odämpade egenfrekvensen (med enheten Hz), η ("äta") är en dimensionslös dämpkonstant, likaså ζ ("stigma") vilket gör att vi kan skriva om ekvation 14:

$$\ddot{u}_h(t) + \eta\omega_0\dot{u}_h(t) + \omega_0^2u_h(t) = 0 \quad (18)$$

Den karakteristiska ekvationen till ekvation 18 ges av:

$$r^2 + \eta\omega_0r + \omega_0^2 = 0 \quad (19)$$

³ Man kan som ett exempel tänka sig att man släpper dörrarna i V-husets foajé från öppet utgångsläge. Dörrarna kommer då att svänga fram och tillbaka några gånger tills rörelsen har dött ut.



$\eta < 2$ medför att

$$r = -\frac{\eta}{2}\omega_0 \pm i\omega_0 \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2}}_{\omega_d} = -\frac{\eta}{2}\omega_0 \pm i\omega_d \quad (20)$$

Här är ω_d den dämpade resonansfrekvensen. Lösningen till den homogena ekvationen är då:

$$u_h(t) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)) \quad (21)$$

där A_1 , A_2 , B_1 och B_2 är konstanter som bestäms med hjälp av begynnelsevillkor. Den sista likheten fås med Eulers formler (se ekvation 30-32).

Partikulärlösningen, som visar förskjutningen vid påverkan av drivande kraft, skall nu bestämmas. Angreppssättet är att ansätta en förskjutning som liknar kraften, beräkna de två derivatorna, och sedan sätta in dessa uttryck i ekvationen och lösa ut de obekanta koefficienterna. Om den drivande kraften är en harmonisk kraft med vinkelfrekvensen ω och $F(t) = F_{driv} \cos(\omega t)$, så ansätt

$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t) \quad (22)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{u}_p(t) = D_1 \omega \cos(\omega t) - D_2 \omega \sin(\omega t) \quad (23)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -D_1 \omega^2 \sin(\omega t) - D_2 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (24)$$

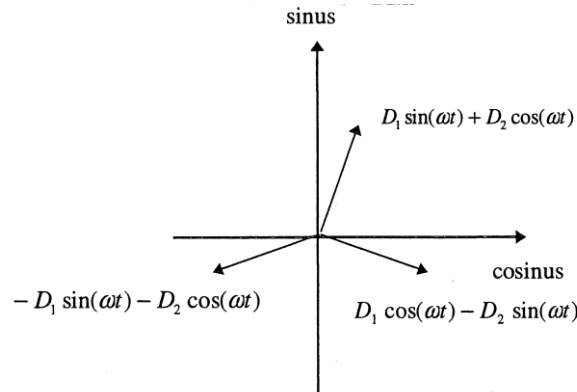
Insättning i ekvation 12 ger:

$$M\ddot{u}_p(t) + R\dot{u}_p(t) + Ku_p(t) = F_{driv} \cos(\omega t) \quad (25)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & -M\omega^2 (D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)) + R\omega (D_1 \cos(\omega t) - D_2 \sin(\omega t)) + \\ & + K(D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)) = F_{driv} \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (26)$$

Vi ska nu lösa ut konstanterna D_1 och D_2 . Vi har i högerledet en ensam cosinusterm, medan i vänsterledet har vi både sinus- och cosinustermerna. Konstanterna måste nu väljas så att detta går ihop vid alla tidpunkter. Om vi ser sinustermerna som en koordinat och cosinustermerna som en annan koordinat, så kan vi tänka oss att följande tvådimensionella vektordiagram beskriver problemet.



Figur 6 Visare

Vi kan nu ställa upp ett ekvationssystem med två ekvationer (två obekanta), en för sinustermerna och en för cosinustermerna:

$$\begin{cases} -M\omega^2 D_1 - R\omega D_2 + KD_1 = 0 \\ -M\omega^2 D_2 + R\omega D_1 + KD_2 = F_{driv} \end{cases} \quad (27)$$

Om man löser ut D_1 och D_2 , så har vi partikulärlösningen

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{R\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \\ D_2 &= \frac{K - M\omega^2}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \end{aligned} \quad (28a)$$

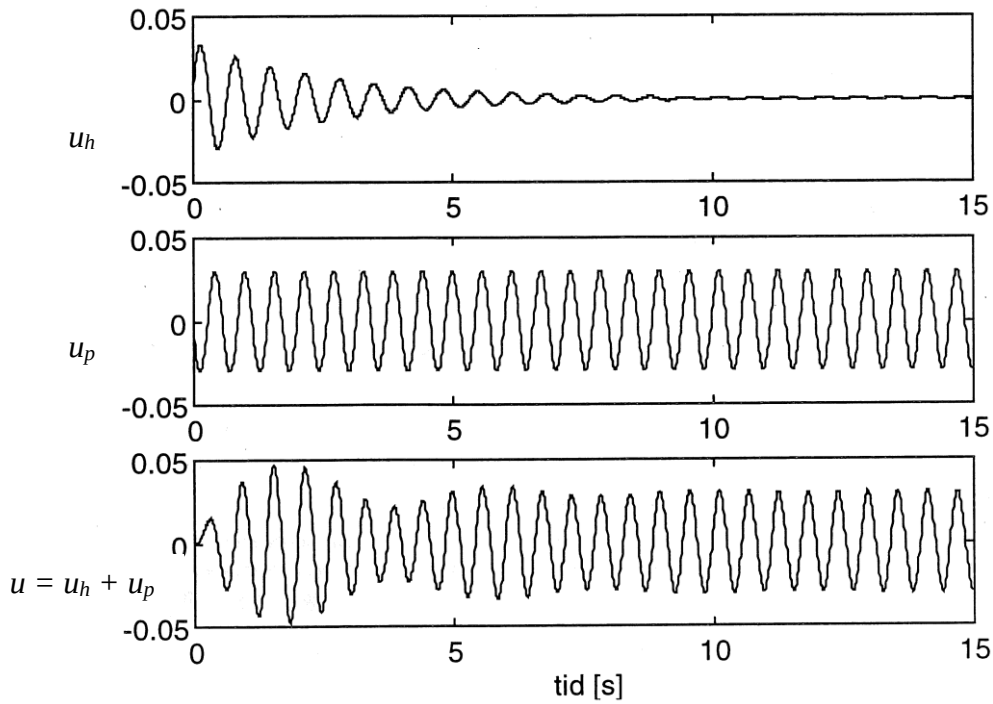
$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)$$

Ekvationer (28a) skulle kunna också skrivas, med hjälp av ekvation (7), som:

$$u_p(t) = D \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2} \\ \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{-D_1}{D_2}\right) \end{aligned} \quad (28b)$$

Om man inför $\omega_0^2 = K/M$ ser man att $K - M\omega^2 = M(\omega_0^2 - \omega^2)$, vilken försvinner vid resonans ($\omega \rightarrow \omega_0$), vilket vi ska återkomma till. Den totala lösningen ges av $u(t) = u_p(t) + u_h(t)$. Som ett exempel visar vi tidshistorien för $u_h(t)$, $u_p(t)$ och $u(t)$ för ett fall ($M = 5000$ kg, $R = 3750$ Ns/m, $K = 4.44 \cdot 10^5$ N/m, $F(t) = F_{driv} \sin(\omega t)$, $\omega = 11$ rad/s och $F_{driv} = 5000$ N, och begynnelsevillkoren $u(0) = 0$, $v(0) = 0$).



Figur 7 Homogen, partikulär och total lösning

Efter en viss tid, steady state, har den homogena lösningen klingat av. Då är $u(t) \approx u_p(t)$. I akustiska sammanhang är det därför oftast $u_p(t)$ som är av intresse. De maskiner som vibrerar och fläktar som går genererar ofta monotona ljudbilder där partikulärlösningen är dominerande över den homogena lösningen. Det är därför vanligt att man endast betraktar partikulärlösningen av problemet, och så kommer vi att (till största delen) göra i fortsättningen. Men då behöver vi en bättre metod för att lösa dessa ekvationer.

Då, responsen av en SDOF system kan beskrivas (om man kombinerar ekvationerna (21,28b)) också som:

$$u_{total}(t) = u_p(t) + u_h(t) = \frac{\left(\frac{F_{driv}}{K}\right) \cdot \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2 \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2}} + e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)) \quad (28c)$$

där

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{2 \cdot \left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2} \quad (28d)$$



Komplex amplitud

Övergång till frekvensled

För att komma vidare behöver vi en ny ansats för att få partikulärlösningen (i fortsättningen bortser vi alltså från den homogena lösningen, så vi skriver inte ut index p). Vi har sedan tidigare att lösa:

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (29)$$

Vi kommer att göra en ansats med komplexa tal, och nu har vi kraften⁴ $F(t) = F_{\text{driv}} \cos(\omega t) = \text{Re}\{F_{\text{driv}} e^{i\omega t}\}$ enligt Eulers ekvationer, som lyder:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad (30)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad (31)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{i}{2}(-e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad (32)$$

Till ansats söker vi nu en funktion som liknar kraften. Vi vill då ha realdelen av en funktion som består av en harmonisk term, $e^{i\omega t}$, och en amplitud framför den harmoniska termen. Denna amplitudfunktion kan generellt sett vara en funktion av frekvensen (vinkelfrekvensen) och dessutom komplex. Det är denna nya funktion som vi kallar komplex amplitud, och betecknar med $\tilde{u}(\omega)$, där vågtecknet indikerar att det är en ny funktion, vidare är den en funktion av ω . Vi gör alltså följande ansats, och deriverar:

Ansätt:

$$u(t) = \text{Re}\{\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (33)$$

$\Rightarrow$

$$\dot{u}(t) = \text{Re}\{i\omega \cdot \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (34)$$

$$\ddot{u}(t) = \text{Re}\{-\omega^2 \cdot \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (35)$$

Insatt i ekvation 12 ger detta:

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F_{\text{driv}} \cos(\omega t) \quad (36)$$

⁴ Det bör påpekas att det även är möjligt att välja imaginärdelen, vilket motsvarar att kraften är en sinus istället för en cosinus, eller med andra ord en fasskillnad på 90°. I akustiken väljer man ofta realdelen eftersom det ofta känns naturligare att ta realdelen av det komplexa resultatet för att kunna göra en fysikalisk tolkning.



$\Leftrightarrow$

$$M \operatorname{Re}\{-\omega^2 \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} + R \operatorname{Re}\{i\omega \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} + K \operatorname{Re}\{\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{F_{\text{driv}} \cdot e^{i\omega t}\} \quad (37)$$

Realdelsoperatoren $\operatorname{Re}\{\}$ verkar på alla termer, och kan därför lyftas ut:

$$\operatorname{Re}\{-M\omega^2 \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + Ri\omega \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + K\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{F_{\text{driv}} \cdot e^{i\omega t}\} \quad (38)$$

$\Rightarrow$

$$-M\omega^2 \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + Ri\omega \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + K\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} = F_{\text{driv}} \cdot e^{i\omega t} \quad (39)$$

Vidare ingår den harmoniska⁵ termen $e^{i\omega t}$ i alla uttryck och kan därmed förkortas bort:

$$-M\omega^2 \tilde{u}(\omega) + Ri\omega \tilde{u}(\omega) + K\tilde{u}(\omega) = F_{\text{driv}} \quad (40)$$

$\Leftrightarrow$

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{\text{driv}}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (41)$$

Om man inför $\omega_0^2 = K/M$ ser man att $K - M\omega^2 = M(\omega_0^2 - \omega^2)$, vilken försvinner vid resonans ($\omega \rightarrow \omega_0$), och $\tilde{u}(\omega)$ blir då mycket stor.

Med hjälp av ansatsen, väsentligen $e^{i\omega t}$, så har differentialekvationen av andra ordningen blivit en vanlig andragradsekvation med avseende på $\tilde{u}(\omega)$. Det lösta uttrycket $\tilde{u}(\omega)$ som vi kan kalla komplex förskjutningsamplitud eller förskjutningsspektra, innehåller väsentligen all systeminformation som man kan behöva. Vågtecknet över den komplexa amplituden indikerar att vi har en ny funktion, och denna är komplex och är inte längre en funktion av tiden, medan ω betyder att funktionen är en funktion av vinkelfrekvensen⁶. Vi kan också se det som om vi har gjort en sorts transform från tidsfunktioner till komplexa frekvensfunktioner. En mer allmän övergång från tidsfunktioner till frekvensfunktioner får man med Fouriertransformen. Med Fouriertransformen kan man behandla godtyckliga tidsförlopp, inte bara *steady-state* som vi gör här. Det visar sig dock att när man väl dividerar bort drivningen, vilket vi strax ska göra, så blir resultatet detsamma. Den enklaste ansatsen ger alltså inte bara ett enkelt resultat, utan även ett helt generellt resultat, oberoende av drivningen.

⁵ Med harmoniska funktioner, eller harmoniska förlopp, menas $\sin(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$, som har fördelen att vara varandras derivata, samt $e^{i\omega t}$, som är sin egen derivata. Den senare kan också kallas komplext harmonisk. De harmoniska förloppen låter som rena toner. I musikäran har dock harmonisk en vidare definition

⁶ $\omega = 2\pi f$ [rad/s] vinkelfrekvensen, $f = 1/T$ [Hz = 1/s] frekvens, T [s] periodtid, allt gäller för drivningen.



Om vi vill kan vi nu återgå till tidsfunktionen (tidsplanet) med hjälp av ansatsen:

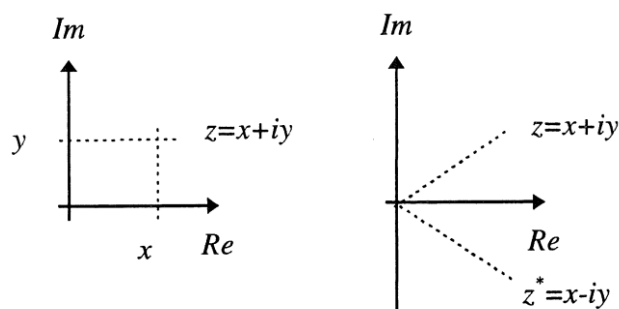
$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_{\text{driv}}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \\ &= \frac{F_{\text{driv}}}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2} \operatorname{Re} \left\{ (K - M \cdot \omega^2 - R \cdot i\omega) \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right\} = \\ &= \frac{F_{\text{driv}}}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2} ((K - M \cdot \omega^2) \cos(\omega t) + R\omega \sin(\omega t)) \end{aligned} \quad (42)$$

Denna lösning är densamma som i ekvation 28a.

Oftast nöjer man sig dock med att betrakta systemet i frekvensplanet. Även om vi har sett att den harmoniska (transienta) lösningen inte spelar någon roll i det långa loppet, så kan man tycka att vi har gjort en allvarlig begränsning av teorin då vi endast ser på partikulärlösningen till harmoniska funktioner (sinussvängningar). Så är dock inte fallet. Inom akustiken utnyttjar man ofta det faktum att varje tidsvarierande funktion, med hjälp av Fouriertransform eller Fourierserier, kan beskrivas som en summa av enkla sinusfunktioner med olika frekvens, amplitud och fas. Det betyder att en godtycklig pålagd kraft $F(t)$ kan ersättas med ett, ofta stort, antal enkla sinusfunktioner. Så istället för att försöka hitta en ny lösning till differentialekvationen (ekvation 12) för varje ny kraft, så löser man den, som vi nu har gjort, för varje harmonisk funktion. Den aktuella kraftens spektrum, vilket fås med Fouriertransformen, kan sedan läggas till. Detta behandlas närmare i området som kallas linjära system.

Komplex räkning

Vi utnyttjade härvid några räkneregler för komplexa tal, och det kan vara på sin plats att återge dessa:



Figur 8 Komplexa tal

- Imaginära enheten:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \dots \quad i^{-1} = -i \quad (43)$$

- Komplexa tal:

$$z = x + iy \quad (44)$$



- Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (45)$$

- Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2) \quad (46)$$

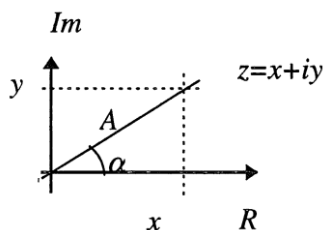
- Komplext konjugat:

$$z^* = x - iy \quad (47)$$

- Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (48)$$

Amplitud och fasvinkel är viktiga begrepp:



Figur 9 Amplitud och fas

- Amplitud (eller absolutbelopp):

$$A = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (49)$$

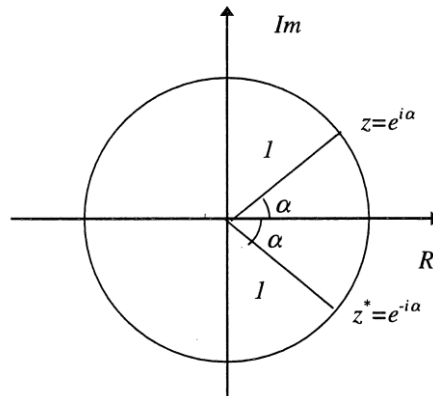
- Fas (alltid i radianer!):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (50)$$

Ur figur Figur 9 kan man då se att:

$$x = A \cos(\alpha), \quad y = A \sin(\alpha) \quad (51)$$

Med hjälp av Eulers former, ekvation 30-32, och enhetscirkeln så har vi vidare:



Figur 10 Enhetscirkeln

$$z = x + iy = Ae^{i\alpha} = A(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \quad (52)$$

$$z_1 \cdot z_2 = A_1 A_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (53)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (54)$$

Överföringsfunktioner

Vi återgår nu till att titta på resultatet av de komplexa räkningarna, ekvation 41 gav den komplexa förskjutningsamplituden, vilken beror på storleken av den pålagda kraften

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (55)$$

Ofta vill man betrakta systemen, i detta fall vårt massa-fjäder-system, utan att man ser de yttre förhållandena, såsom i detta fall kraften (vilken kan vara en funktion av frekvensen). Om vi normerar förskjutningen med avseende på den drivande kraften, så får vi ett uttryck som bara beror av systemets storheter M , R och K , samt vinkelfrekvensen. Man har då kvar en komplex kvot

$$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{F_{driv}(\omega)} = \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (56)$$

Vi kan kalla denna kvot för systemets dynamiska vekhet, då en stor kvot (vekhet) ger en stor förskjutning för en liten kraft. Den omvända kvoten kan vi kalla dynamisk styvhet

$$K_{dyn}(\omega) = \frac{F_{driv}(\omega)}{\tilde{u}(\omega)} = -M \cdot \omega^2 + R \cdot i\omega + K \quad (57)$$



Allmänt brukar man kalla kvoter mellan komplexa amplituder (spektra), i samma punkt eller i en annan punkt i ett visst system för överföringsfunktion $H(\omega)$ om de är kvoter mellan utsignal och insignal.

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\tilde{S}_j(\omega)}{\tilde{S}_i(\omega)} = \frac{\text{utsignal}}{\text{insignal}} \quad (58)$$

Med signal menas i detta fall de båda variabla termerna i ett uttryck, i vårt fall är kraften insignal medan förskjutningen är utsignal. Övriga parametrar, massa, fjäder och dämpare, tillhör systemet. Signalbegreppet antyder att de båda variablerna är mätbara, och att man kan bestämma systemets egenskaper genom att mäta dessa signaler. Den dynamiska styvheten, K_{dyn} , är i detta fall tydligen inte en överföringsfunktion, då den är en kvot mellan insignal och utsignal och inte tvärt om. Den dynamiska vekheten, C_{dyn} , är däremot en äkta överföringsfunktion.

Det är också möjligt att definiera andra överföringsfunktioner som utgår från massans hastighet eller acceleration. Detta illustreras i tabell 2 nedan tillsammans med benämningen av respektive överföringsfunktion. Av dessa kommer framförallt impedansen att diskuteras framöver.

Förskjutning u	Hastighet v	Acceleration a
$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$ Dynamisk vekhet	$Y(\omega) = \frac{\tilde{v}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$ Mekanisk admittans	$N(\omega) = \frac{\tilde{a}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$ Mekanisk accelerans
$K_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{u}(\omega)}$ Dynamisk styvhet	$Z(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{v}(\omega)}$ Mekanisk impedans	$M_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{a}(\omega)}$ Dynamisk massa

Tabell 2 Kvoter i frekvensplanet

Har man en överföringsfunktion så tar man enkelt fram de övriga, t ex genom att använda att $\tilde{v}(\omega) = i\omega \cdot \tilde{u}(\omega)$, se ekvation 33-35.

Man bör komma ihåg att överföringsfunktioner endast gäller för linjära system, det vill säga när spektrumet är oberoende av amplituden. I sådana system överförs således en ren ton (sinusfrekvens) oberoende av alla andra befintliga toner. Detta är en stor förenkling som inte gäller om man arbetar med tidsfunktioner, då störningar i olika tidpunkter påverkar varandra. Vidare betyder detta att överföringsfunktioner experimentellt kan bestämmas antingen genom att man sakta sveper med kraftens frekvens (sinussvep) eller genom att man sänder in en signal som innehåller alla sökta frekvenser på en gång. En sådan signal kallas brus, och om den kvadrerade signalens amplitud är konstant för samtliga frekvenser kallas det vitt brus.

Att representera dessa komplexa dynamiska kvoter grafiskt kan man göra på olika sätt. Det vanligaste alternativet är att tänka sig uttrycket på formen $C_{dyn} = Ae^{i\alpha}$, där A är amplituden och α fasen.



$$A = |C_{dyn}(\omega)| = \left| \frac{\tilde{u}(\omega)}{F_{driv}(\omega)} \right| = \left| \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2}} \quad (59)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\text{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}}\right) = \arctan\left(\frac{-R\omega}{K - M \cdot \omega^2}\right) \quad (60)$$

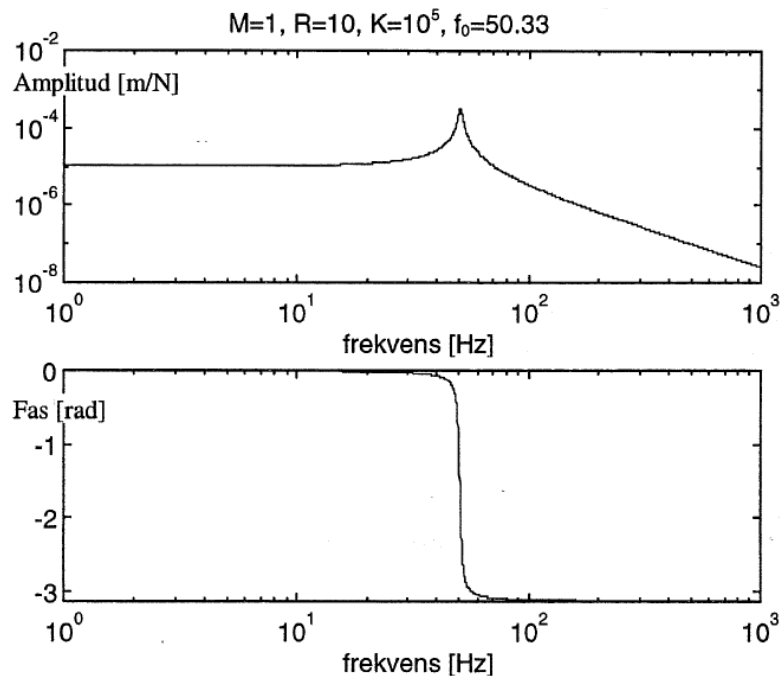
Vid det odämpade systemets resonans, $\omega_0 = (K/M)^{1/2}$, har amplituden (nästan) ett maximum och fasen är $\pi/2$, det vill säga 90° efter drivningen.

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (61)$$

$$A = |C_{dyn}(\omega_0)| = \frac{1}{R\omega_0} \quad (62)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\text{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (63)$$

Det är vanligt att man använder logaritmisk skala på axlarna. Denna representation som illustreras i Figur 11 kallas Bode-diagram.



Figur 11 Bode-diagram för överföringsfunktionens amplitud och fas



För frekvenser under resonansfrekvensen ($\omega < \omega_0$) så dominerar fjäderstyvheten, amplituden är horisontell och fasen är noll. Om vi sedan ökar frekvensen tills vi närmar oss resonans ($\omega = \omega_0$) så tar bidragen från fjädertermen och masstermen ut varandra och vi får resonans där amplituden bestäms av dämpningen. Över resonans ($\omega > \omega_0$) dominerar bidraget från masstermen, amplituden lutar med konstant lutning i en log-log skala

$$\omega > \omega_0 \quad (64)$$

$$C_{dyn} = \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \approx \frac{1}{M\omega^2} \quad (65)$$

$$\log\left(\frac{1}{M\omega^2}\right) = -2\log(\omega) - \log(M) - 2\log(\pi) - \log(M) \quad (66)$$

Lutningen är således -2 dekader⁷ per dekad frekvens. Detta är ett mycket viktigt praktiskt resultat, som därför har fått ett eget namn, *masslagen*. Det betyder att över resonansen kommer förskjutningen minska mycket snabbt med ökande frekvens, $\tilde{u}(\omega) \propto \omega^{-2}$ (tecknet $\propto$ betyder "proportionell mot"). Vi kan också se att det finns en punkt över resonans där förskjutningen är lika stor som den statiska förskjutningen, och över denna punkt kommer förskjutningen att vara mindre än den statiska. Detta faktum utnyttjas vid vibrationsisolering.

Om vi tittar på fasdiagrammet så ser vi att fasen är noll vid riktigt låga frekvenser, det vill säga förskjutningen har samma fas som drivningen. Vid resonans är fasen $-\pi/2$, alltså ligger förskjutningen 90° efter drivningen. Över resonans närmar sig fasen $-\pi$, vilket betyder att förskjutningen är i motfas mot drivningen, förskjutningen ligger 180° efter drivningen.

Detta förhållande kan lätt kontrolleras experimentellt med en vikt och en gummisnodd. Fäst vikten i gummisnodden, som du fäster i ett finger, så att du får ett massa-fjäder-system. För du handen långsamt upp och ner, så följer vikten med handen. Ökar du frekvensen tills du kommer till resonans, där vibrationen är som störst, så ligger förskjutningen hos massan 90° efter handen. Ökar du frekvensen ännu mer så kommer handen och massan att röra sig i motfas.

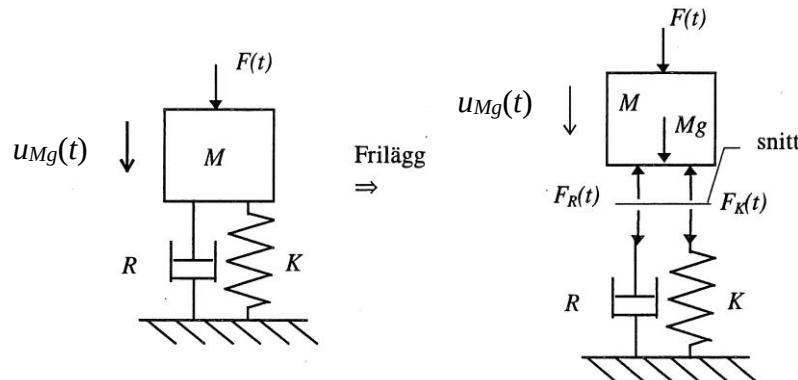
Resonatorer

I detta avsnitt ska vi titta lite närmare på några resonanta system som kan beskrivas med det enkla massa-fjädersystemet. Vi börjar med att vända på massa-fjädersystemet, så att vi får med tyngdkraften. Vi ska visa att detta inte spelar någon roll.

Tyngdkraften

Vi vänder nu alltså på massa-fjädersystemet:

⁷ En dekad är detsamma som en tiopotens.



Figur 12 Stående resonatorer

Som vanligt måste Newtons rörelselag gälla i varje ögonblick

$$(\downarrow) \quad F(t) - F_K - F_R + Mg = Ma(t) \quad (67)$$

Vi för in uttrycken för fjäderkraften och dämpkraften, det vill säga $F_K(t) = K u(t)$ och $F_R(t) = R v(t)$

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) + Mg \quad (68)$$

Vi ser att vi har en differentialekvation där "drivningen" består av en harmonisk kraft $F(t)$ och en statisk kraft Mg . Till partikulärlösningen, vilken är den vi i första hand är intresserade av, ansätter vi då att förskjutningen består av en harmonisk del och en statisk del, $u_{tot}(t) = u(t) + u_s(t)$, där den statiska fås av den sättning som massan statiskt orsakar:

$$u_s = \text{konstant} \Rightarrow \dot{u}_s = 0 \quad \text{och} \quad \ddot{u}_s = 0 \quad (69)$$

$$0 + 0 + Ku_s = 0 + Mg \Rightarrow u_s = \frac{Mg}{K} \quad (70)$$

Den harmoniska delen fås på samma sätt genom att bara lösa ekvationen för den harmoniska kraften:

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) + 0 \quad (71)$$

Men då detta precis är den ekvation som vi har ägnat oss åt hittills, så kan vi anse att dess lösning är given. Tyngdkraften ger tydligen en statisk förskjutning som bara flyttar arbetspunkten. Om fjädern är olinjär i vissa områden kan dock vissa arbetspunkter vara att föredra. Så är dock inte fallet här, så man kan bortse från tyngdkraften i vibrationsberäkningar.

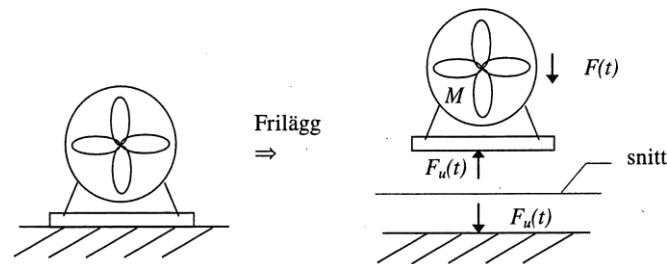
Vibrationsisolering

Som ett första exempel på ett enkelt massa-fjädersystem i en applikation ska vi nu titta på vibrationsisolering. Vi kan tänka oss att ett industriföretag har bett oss lösa ett vibrationsproblem som de har. En roterande maskin med



viss excentricitet står fastskruvad på ett styvt bjälklag, vilket orsakar vibrationer i bjälklaget som vidare ger buller och vibrationsskador. Fabrikören i fråga ber oss, som konsulter, minska problemet. Vad ska vi göra? Vi börjar med att anta att underlaget är orörligt, det vill säga att maskinen är fast inspänd. Detta är en förenkling som i allmänhet inte är helt giltig, men för tjocka betongbjälklag, 250-300 mm, är antagandet oftast rimligt. För lätta träbjälklag är emellertid antagandet tveksamt.

Vi frilägger nu maskinen:

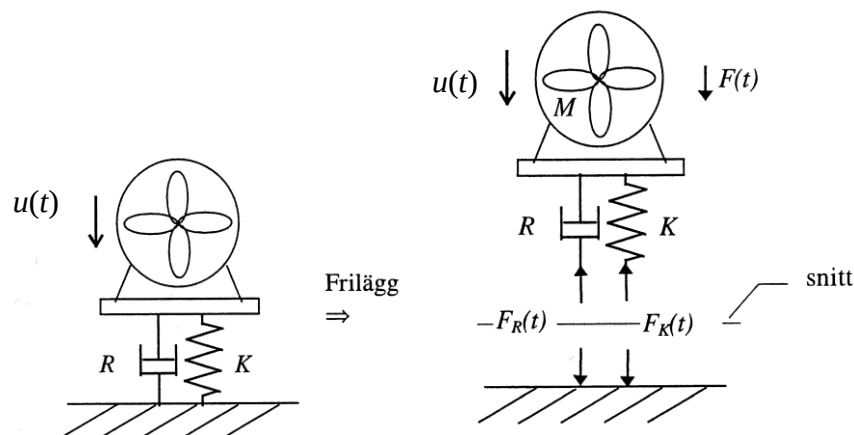


Figur 13 Friläggning av maskin innan åtgärd

Rörelselagen ger nu, då vi inte har någon förskjutning eller acceleration (fläktens ram och hölje antas stå still):

$$(\downarrow)F(t) - F_u(t) = 0 \quad (72)$$

Vi ser att den kraft som orsakas av maskinens excentricitet $F(t)$ går rakt ner i bjälklaget, $F_u(t) = F(t)$, där index u står för *utan* vibrationsisolerings. Om vi ansätter harmoniska störningar, $F(t) = \text{Re}\{\tilde{F}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\}$ och som innan bortser från realdelsoperatorn och den harmoniska termen, som är gemensam för alla termer, så kan vi skriva $\tilde{F}(\omega) = \tilde{F}_u(\omega)$. Vi tänker oss nu att vi sätter maskinen på gummiklossar eller stålfjädrar. Vi tänker oss vidare att dämpning kan ingå i fjädrarna. Om vi använder fyra fjädrar blir den sammanlagda fjäderstyvheten $K = \Sigma K_i$. Detsamma gäller för dämpningen.



Figur 14 Friläggning av maskin efter åtgärd



Rörelselagen måste som vanligt råda:

$$(\downarrow) \quad F(t) - F_K(t) - F_R(t) = Ma(t) \quad (73)$$

Detta är samma ekvation som vi har behandlat tidigare. Vi är intresserade av partikulärlösningen, och lösningen gavs i ekvation 41. Förskjutningen, beskrivet i frekvensplanet, blev:

$$-M\omega^2\tilde{u}(\omega) + Ri\omega\tilde{u}(\omega) + K\tilde{u}(\omega) = F_{driv}(\omega) \Leftrightarrow \quad (74)$$

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (75)$$

Men nu är vi primärt intresserade av kraften som går ner i bjälklaget när vi har lagt till fjädern och dämparen, och vi vet att kraften mot underlaget kan beskrivas som summan av kraften från fjädern och kraften från dämparen, $F_m(t) = F_K(t) + F_R(t)$, där index m står för *med* vibrationsisolering. I frekvensplanet blir detta:

$$\tilde{F}_m(\omega) = \tilde{F}_K(\omega) + \tilde{F}_R(\omega) = K\tilde{u}(\omega) + R \cdot i\omega\tilde{u}(\omega) \quad (76)$$

$\Rightarrow$

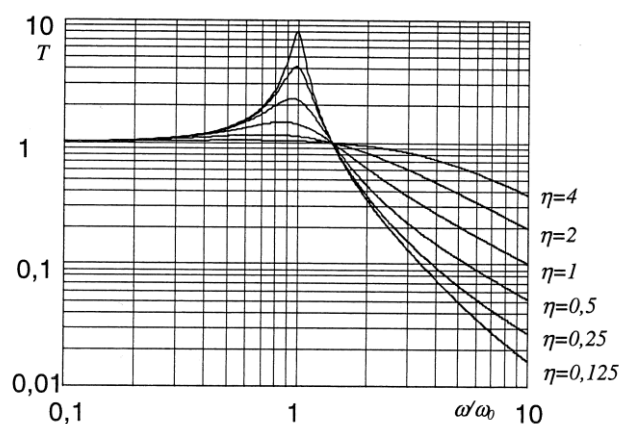
$$\frac{\tilde{F}_m(\omega)}{\tilde{F}_{driv}(\omega)} = \frac{\tilde{F}_m(\omega)}{\tilde{F}_u(\omega)} = \frac{K + R \cdot i\omega}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (77)$$

Vi har tydligen fått ett uttryck som ger oss kvoten mellan kraften mot underlaget med vibrationsisolering mot kraften mot underlaget utan vibrationsisolering. Det viktiga i denna typ av vibrationsisoleringsproblem är att amplituden av vibrationen minskar med åtgärden. Absolutbeloppet av kvoten ovan brukar benämnas insättningsdämpning eller *insertion loss*, medan transmissionstal T ⁸ eller *transmissibility* används om det handlar om kvot mellan drivning och underlag,

$$T = \left| \frac{\tilde{F}_{driv}(\omega)}{\tilde{F}_m(\omega)} \right| \quad (78)$$

Att beräkna transmissionstalet och insättningsdämpningen lämnas som övning. Om transmissionstalet är 1 så har ingen förändring skett, och om $T < 1$ så har en förbättring skett, det vill säga en minskning av kraftens amplitud har skett, medan om $T > 1$ så känner underlaget en större amplitud än den ursprungliga, alltså en försämring. Nedan visas hur transmissionstalet kan se ut. Vi har här satt förlustfaktorn $\eta = R/\omega_0 M$, där resonansfrekvensen som vanligt är $\omega_0 = (K/M)^{1/2}$. Frekvensen är sedan normerad mot resonansfrekvensen så att resonans alltid sker vid $\omega/\omega_0 = 1$.

⁸ T står här för transmissionstal och inte för periodtid.



Figur 15 Transmissionstal, normerad frekvens och olika värden på förlustfaktorn, η

Vi kan nu se att $T > 1$ vid $\omega/\omega_0 \approx 1$, och vi får tydligen ingen förbättring med hjälp av vibrationsisoleringen runt resonansfrekvensen eller vid lägre frekvenser, $\omega/\omega_0 < 1$. Däremot får man alltid en förbättring över resonansfrekvensen. Vidare ser man att dämparen mest "smetar ut" beteendet, så att effekten vid resonans inte blir så stor.

Om vi återgår till vårt ursprungliga problem med fabrikören så löser vi det genom att ta reda på den dominerande frekvensen i den drivande kraften $F(t)$, vi kan beteckna den med ω_{maskin} , vilken troligen är den samma som rotationsfrekvensen, samt maskinens vikt M . Sedan dimensionerar vi fjäderstyvheten K så att resonansfrekvensen för systemet $\omega_0 = (K/M)^{1/2} \ll \omega_{maskin}$. Det gäller alltså att ha så veka fjädrar som möjligt, vilket kan vara svårt i praktiken.



Viktiga formler – kap 1

Enfrihetsgradssystemet med en massa, fjäder och en dämpare leder till rörelseekvationen

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

Som har en total lösning som består av en homogen och en partikulär del, $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$. Den homogena är

$$u_h(t) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t))$$

där den odämpade resonansfrekvensen, dämpkonstanten och dämpade resonansfrekvensen förts in

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \eta = \frac{R}{\sqrt{MK}} = 2\zeta \quad \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2}$$

och partikulärlösningen för en drivande kraft $F(t) = F_{driv} \cos(\omega t) = \text{Re}\{F_{driv} e^{i\omega t}\}$ är

$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t) \quad \begin{cases} D_1 = \frac{R\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \\ D_2 = \frac{K - M\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \end{cases}$$

Partikulärlösningen uttryckt på komplex form blir

$$u(t) = \text{Re}\{\tilde{u}(\omega) e^{i\omega t}\} = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} e^{i\omega t}$$

Tyngdkraften (om närvarande) skapar en statisk sättning med sträckan $u_s = \frac{Mg}{K}$

Dynamisk vekhet definieras som kvoten mellan komplex förskjutning och komplex kraft

$$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$$

C_{dyn} kan, som andra överföringsfunktioner, åskådliggöras med ett Bodediagram där man plottar amplitud och fas

$$A = |C_{dyn}(\omega_0)| = \frac{1}{R\omega_0} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\text{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Transmissionstalet T är kvoten mellan drivande kraft och kraft som går ner i underlaget, $T = \left| \frac{\tilde{F}_{driv}(\omega)}{\tilde{F}_m(\omega)} \right|$

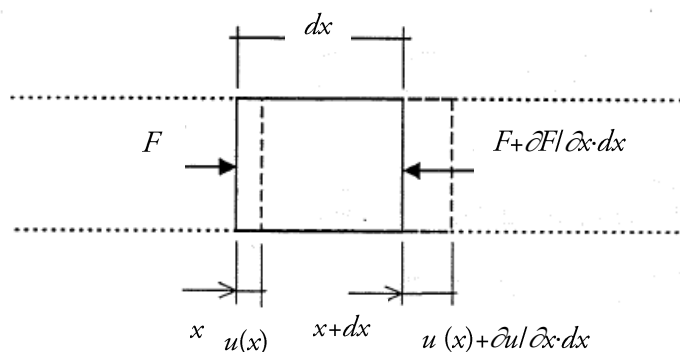


2. Endimensionell vågutbredning

Här kommer vågekvationen för framför allt longitudinalvågor att tas fram. När vi har fått fram vågekvationen och en lösningsmetodik kommer vi att behandla endimensionella longitudinalvågor i luft. Här behandlas även skjuvvåg och böjvåg i fasta material.

Härledning av vågekvationen, longitudinalvåg i en stång

Vi tänker oss att vi skär ut en liten del av en stång, frilägger denna och ställer upp Newtons rörelseekvation. Stångbiten har längden dx . Vidare har vi en utbredd massa per längdenhet $\mu = \rho S$, där ρ är densiteten och S är tvärsnittsarean. På den ena snittytan vid koordinaten x verkar en kraft $F(x)$ och på den andra snittytan vid $x+dx$ verkar samma kraft plus en viss förändring av denna, $F(x+dx)$, vilket kan Taylorutvecklas och approximeras med $F(x+dx) \approx F + \partial F / \partial x \cdot dx$. Förskjutningen av den vänstra snittytan betecknas $u(x)$ medan förskjutningen av den högra snittytan då blir $u(x+dx)$, som på samma sätt approximeras med $u(x+dx) \approx u(x) + \partial u / \partial x \cdot dx$.



Figur 16 Friläggning av stangelement

Vi ställer nu upp rörelseekvationen som säger att summan av krafterna ska vara lika med massan gånger tyngdpunktens acceleration

$$(\rightarrow) \quad F - \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = ma \quad (1)$$

Om dx är mycket litet kan vi vidare approximera förskjutningen av massans tyngdpunkt med $u(x+dx/2) \approx u(x)$. Alltså har vi

$$m = \mu dx \quad (2)$$

$$a = \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$



Rörelseekvationen kan nu förenklas till

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = -\mu \cdot dx \cdot \ddot{u} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

För att komma vidare behöver vi nu ytterligare en ekvation som relaterar krafterna med förskjutningarna. Från Byggnadsmekaniken känner vi till Hookes lag, som säger att spänningarna σ är proportionella med töjningarna ε .

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6)$$

där E är elasticitetsmodulen och tvärkontraktionen försummas. Vidare är spänning detsamma som kraft per ytenhet och töjning detsamma som förskjutning per längdenhet. Vi måste dock beakta att positiv spänning är dragen, medan vi har satt kraften tryckt, så vi får ha negativt tecken på kraften:

$$\sigma = -\frac{F}{S} \quad (7)$$

Töjning förhåller sig till förskjutningen som

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

Den sökta relationen mellan krafterna och förskjutningarna är således

$$F = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

Om vi deriverar ekvation (9) en gång med avseende på x och stoppar in i ekvation (5), så har vi slutligen vågekvationen för en longitudinalvåg i en stång:

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Vågekvationen är tydligen en andra ordningens partiell differentialekvation. För att lösa den behövs två begynnelsevillkor och två randvillkor. De flesta vågekvationer, så som transversalvågen i en gitarrsträng, en



torsionsvåg i en svarv eller elektriska vågor, har denna form. Böjvågen i en balk har dock ett annat utseende, den är av fjärde ordningen.

Ofta använder man sig av förskjutningshastigheten $v = \partial u / \partial t$ i stället för förskjutningen u . I sådana fall blir vågekvationen istället

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

eftersom derivatan $\partial/\partial t$ verkar lika på alla termer. Ekvation (5) och (9) blir i detta fall

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -ES \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14)$$

vilket ser lite snyggare ut, då relationerna är symmetriska (kom ihåg att $\mu = \rho S$). Dessa ekvationer brukar kallas fältekvationerna. Deriverar vi nu ekvation (13) med avseende på x och ekvation (14) med avseende på t , så har vi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -ES \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (16)$$

och om vi stoppar in den ena i den andra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\mu}{ES} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (17)$$

$\Leftrightarrow$

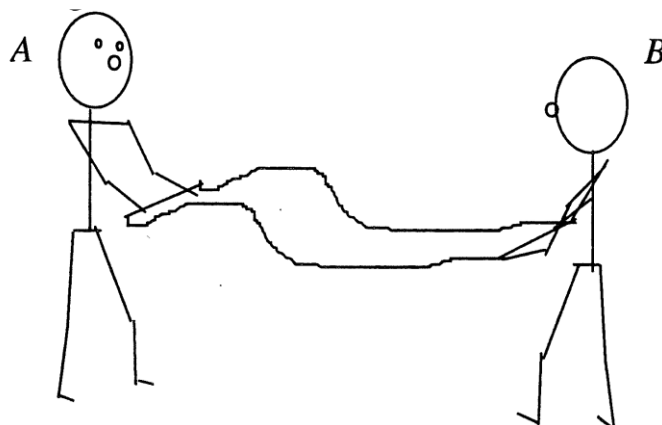
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

så får vi vågekvationen igen, men denna gång med kraften F som variabel. Det är tydligen likgiltigt vilken variabel man använde, och man använder lämpligen den som lämpar sig bäst för problemet i fråga. För vågor i fasta material är det vanligast att använda förskjutning som variabel. De olika variablerna brukar benämnas fältvariablerna.



Vågutbredning

Men vad är då en våg?



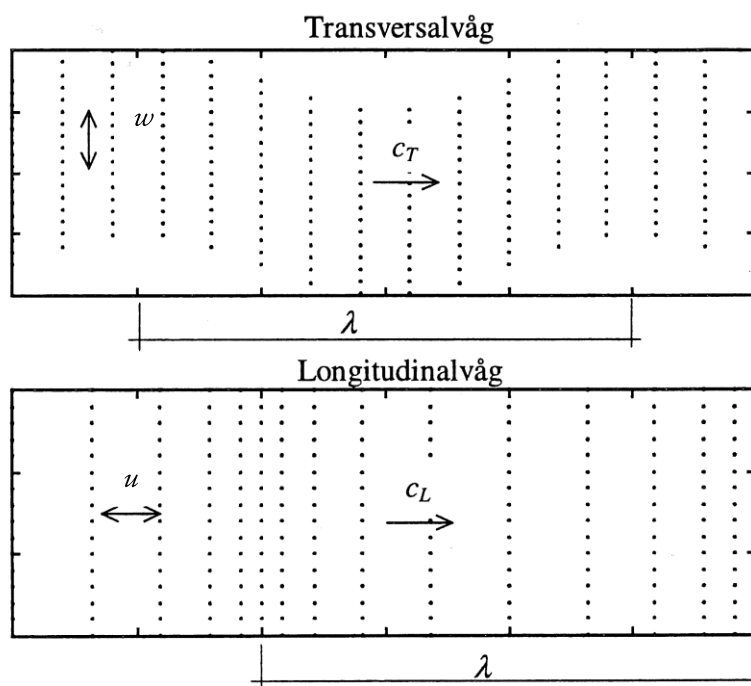
Figur 17 Vågutbredning i en matta.

Vi kan tänka oss två personer som skakar en matta, vi kallar dem A och B. Vi tänker oss vidare att B håller sin kant stilla medan A gör en plötslig rörelse uppåt vid sin kant. Resten av mattan vill nu följa med i denna rörelse, med början med de punkter på mattan som är närmast A. Rörelsen fortsätter sedan att sprida sig med en konstant hastighet tills den når B. Om A fortsätter att skaka sin ände upp och ned, och provar olika takt i skakandet, olika frekvens, så kommer de finna att om man skakar snabbt så blir "pulsen", eller våglängden, kort och om man skakar långsamt så blir våglängden lång. Men oavsett vilken frekvens de skakar med så kommer spridningshastigheten att vara densamma. Med andra ord, händelsen att "röra sig uppåt" sprider sig längs mattan med en viss hastighet som vi kan kalla c , vågutbredningshastighet. Det känns naturligt att c beror på mattans vikt och hur hårt A och B drar i mattan, hur stor spänningen är. Är massan stor, tung matta, transporteras vågen långsamt. Är spänningen stor går vågen snabbt. Den initiala förskjutningen kommer att repeteras vid en punkt belägen en sträcka x från A, och detta sker efter x/c sekunder, det vill säga den tid det tar för vågen att utbreda sig sträckan x .

Det är viktigt att inse att ingen massa transporteras av vågen, vad som transporteras är endast möjligheten till rörelse. Massan i mattan rör sig endast upp och sedan ner igen.

I exemplet med mattan ovan var förskjutningen uppåt medan vågutbredningen går mellan A och B, vilket är en transversalvåg.

I exemplet med stängen var vågutbredningen och förskjutningen riktad åt samma håll, en longitudinalvåg. Nedan visas exempel på hur harmoniska transversal- och longitudinalvågor kan se ut. I den övre figuren är våglängden λ , partikelförskjutningen w i y -led samt våghastigheten c_T markerad. I den undre figuren är våglängden λ partikelförskjutningen u i x -led samt våghastigheten c_L markerad.



Figur 18 Exempel på transversalvåg och longitudinalvåg.

Hur ska man då beskriva vågutbredningen? Vi återgår till exemplet med longitudinalvågen i en stång. Vi beskrev här förskjutningarna i en punkt med u , där u både är en funktion av rummet och tiden.

$$u = u(x, t) \quad (19)$$

Om vi nu tittar i en specifik punkt på stången, säg $x = 0$, där vi driver stången med en bestämd förskjutning u_{driv} så har vi där endast en variabel

$$u(0, t) = u_{driv}(t) \quad (20)$$

Vi har tidigare sagt att vad som karakteriserar en våg är att rörelsen fortsätter att sprida sig med en konstant hastighet, som vi kallar c . Vid en annan position $x = x_1$ på stången kommer därför samma tidshistoria att inträffa som för drivpositionen, men försenat på grund av gångtiden x_1/c . Vågformen förändras alltså inte

$$u(x_1, t) = u_{driv}(t - x_1 / c) \quad (21)$$

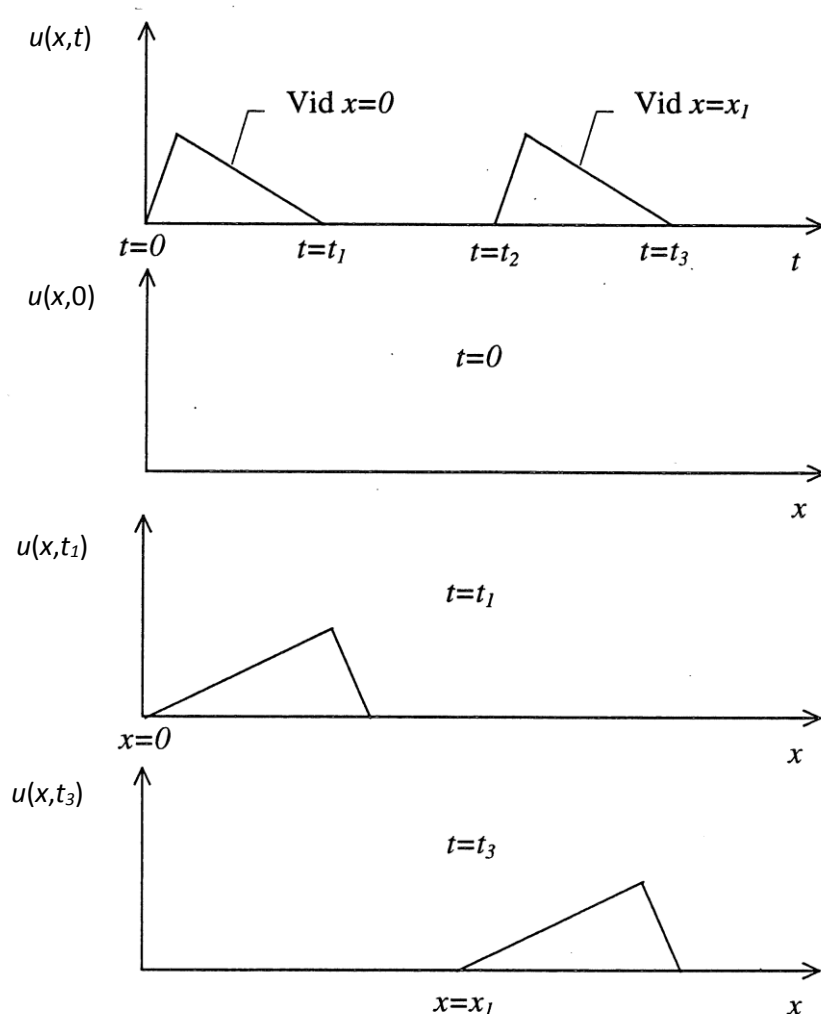
Helt allmänt, för en godtycklig position, har då förskjutningen reducerats till en funktion av en variabel $t - x/c$. Vi har dock missat att vågen i allmänhet kan gå både framåt, i positiv x -riktning, som bakåt, i negativ x -riktning. Alltså behöver vi lägga till en bakåtgående våg, vilken kan beskrivas med en variabel $t + x/c$

$$u(x, t) = u_+(t - x_1 / c) + u_-(t + x_1 / c) \quad (22)$$



Ovanstående funktion kallas d'Alemberts lösning och är lösningen till vågekvationen på den mest generella formen.

Vi har sagt att vågformen inte ändras beroende på var och när vi betraktar den, och att alla delar av vågen rör sig med samma hastighet. För en given tidshistoria vid $x = 0$, så kan man få vågformen, det vill säga motsvarande x -beroende vid en given tidpunkt (jämför med fotografi), genom att överföra varje förskjutning vid $x = 0$, till x -skalan med hjälp av hastigheten c , se figuren nedan. Funktionerna för förskjutningens t -beroende och förskjutningens x -beroende kommer då att bli spegelbilder av varandra. Matematiskt kan man se detta som en konsekvens av att t - och x -termerna i argumentet $t - x/c$ har olika tecken.



Figur 19 Tids- och rumsberoende för våg.

Vi har nu först härlett vågekvationen och sedan resonerat oss fram till hur lösningen till denna bör se ut. Genom att sätta in den antagna lösningen i ekvationen, så kan vi se om den stämmer. För enkelhets skull antar vi att vi endast har en framtående våg, för bakåtgående våg gäller samma sak. Anta



$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u_+(t - x/c) \Rightarrow \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{c} u'_+(t - x/c) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} u''_+(t - x/c) \\
 \frac{\partial u}{\partial t} &= u'_+(t - x/c) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''_+(t - x/c)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Här betyder ' derivata med avseende på hela argumentet, det vill säga $\partial u / \partial (t - x/c)$. Insatt i vågekvationen ger detta

$$\frac{1}{c^2} u''_+ - \frac{\rho}{E} u''_+ = 0 \tag{24}$$

och för att detta ska gälla så måste våghastigheten vara

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{25}$$

vilket verkar rimligt, då ett tyngre medium ger en långsammare våg, medan ett styvare medium ger en snabbare våg.

Harmoniska vågor

Vi har nu visat att funktioner av formen $u(t \pm x/c)$ löser vågekvationen och att våghastigheten c bestäms med hjälp av elasticiteten och densiteten. Ofta är det dock praktiskt att begränsa sig till harmoniska funktioner eftersom varje godtycklig funktion kan beskrivas med hjälp av harmoniska funktioner. Vi antar nu att drivningen är en harmonisk funktion

$$u(0, t) = u_{driv}(t) = \hat{u}_{driv} \cos(\omega t) \tag{26}$$

Om vi vill ha en lösning till vågekvationen på denna form behöver vi bara byta ut t mot $t \pm x/c$.

$$u(x, t) = \hat{u}_{driv} \cos(\omega(t \pm x/c)) \tag{27}$$

Genom att införa en ny term k , som vi kallar vågtal, kan skrivsättet förenklas

$$k = \omega / c \Rightarrow u(x, t) = \hat{u}_{driv} \cos(\omega t \pm kx) \tag{28}$$

Vågtalet k har tydligen samma betydelse för rumsberoende som ω har för tidsberoendet. Vi skriver upp de båda frekvenstermerna jämte varandra

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{29}$$

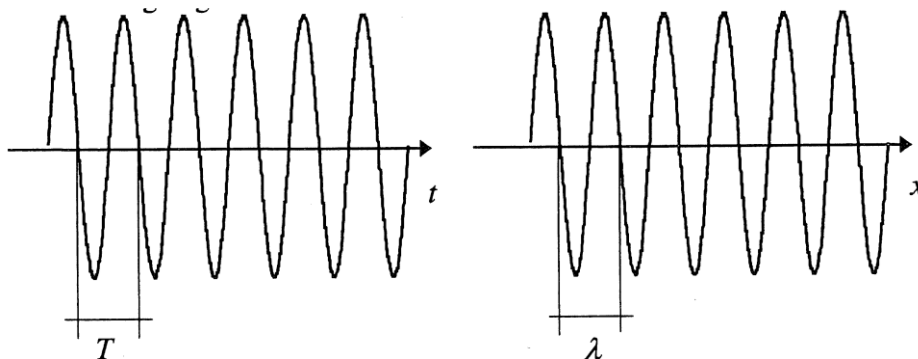
$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{30}$$



Det leder till ett enkelt samband mellan våglängd och frekvens

$$c = f\lambda \quad (31)$$

Här är T periodtid och λ våglängd.



Figur 20. Periodtid T och våglängd λ .

Andra vågtyper i fasta material

I exemplet med stängen ovan har vi bortsett från tvärkontraktionen. Om materialet i stängen är isotropt med tvärkontraktionstalet (*Poisson's ratio*) ν får vi korrigera vågekvationen till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

och våghastigheten blir då istället

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (33)$$

Skjuvvågor

På samma sätt som med longitudinalvågen ovan kan man ställa upp motsvarande vågekvation för skjuvvågor. Som innan använder man rörelselagen, fast nu i vertikalled w , och skjuvspänning istället för normalspänning. Vågekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

där w är förskjutningen i tvärriktningen⁹ och G materialets skjuvmodul. Den har samma lösning som ovan,

⁹ Ofta använder man sig av v för att beskriva transversell förskjutning, men här sparas den till hastighet i longitudinell riktning.



$$w = w(x, t) = \hat{w} \cos(\omega(t \pm x/c)) \quad (35)$$

med våghastigheten

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (36)$$

För isotropa material är våghastigheten för transversella skjuvvågor lägre än för longitudinella tryckvågor eftersom

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (37)$$

Böjvågor

Vågekvationen för böjvågor i balkar såväl som plattor härleds med hjälp av elastiska linjens ekvation. Den skiljer sig från de ovanstående genom att den består av fjärde rumsderivatan av förskjutningen istället för andraderivatan som ovan

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

Där B är balkens böjstyvhet, för rektangulärt tvärsnitt

$$B = EI = E \frac{bh^3}{12} \quad (39)$$

och S är balkens tvärsnittsarea. I en lång balk är vågekvationens (harmoniska) lösning

$$w = w(x, t) = \hat{w} \cos(\omega t \pm kx) \quad (40)$$

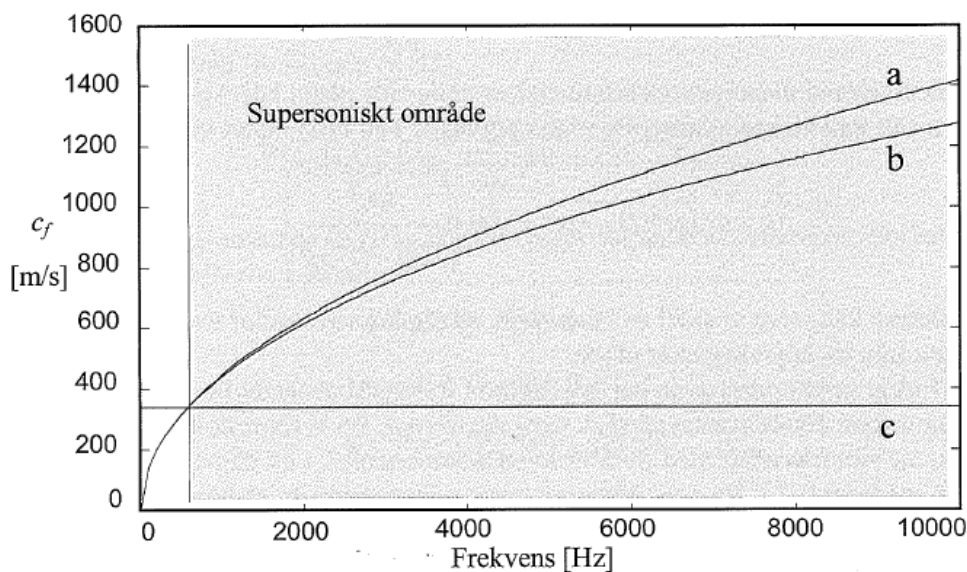
vilket är samma som för longitudinella vågor. När man sätter in lösningen i vågekvationen kan man lösa ut våghastigheten¹⁰ c_f som

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{\rho S}} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{Eh^2}{12\rho}} \quad (41)$$

Vad man kan observera här är det viktiga resultatet att våghastigheten är beroende av frekvensen, ju högre frekvens desto snabbare går vågen. Våghastighetens frekvensberoende kallas dispersion och sambandet ovan kallas dispersionsrelation. För de tidigare nämnda vågtyperna är ju våghastigheten samma oavsett frekvens.

¹⁰ När det gäller våghastighet för böjvågor måste man skilja mellan fashastighet c_f och gruppshastighet c_g . Den förra anger hur snabbt information i vågen (fasen) fortplantar sig, medan den senare hur energin fortplantar sig. De förhåller sig så att $c_g = 2c_f$

Vidare kan man observera att om frekvensen går mot oändligheten, vilket är fysikaliskt möjligt, så går hastigheten också mot oändligheten, vilket inte är fysikaliskt möjligt då information inte kan färdas snabbare än ljuset. Dessförinnan sätter dock teorin begränsningar i att antagandena hos balkteorin som ligger till grund för elastiska linjens ekvation inte längre gäller. Våglängden, som ska vara betydligt längre än balkens tjocklek, minskar med högre frekvens.



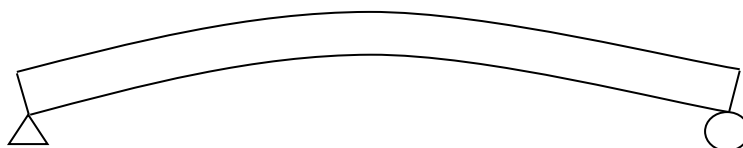
Figur 6-28 Fashastigheten för en cirkulärcylindrisk stålbalk med diametern 5 cm. a) Enligt Bernoulli-Eulerteori, b) enligt Timoshenkoteori. c) Fashastigheten för en kompressionsvåg i luft. Den frekvens där böjvågens fashastighet är lika med ljudhastigheten i det omgivande mediet kallas koincidensfrekvens.

Figur från boken Ljud och vibrationer (Bodén m fl.)

Egensvängningar i balkar

Egensvängningar i balkar inträffar om balkens våglängd (utböjningsformen) stämmer överens med avståndet mellan stöden, se figuren nedan. För en fritt upplagd balk gäller att den lägsta egenfrekvensen inträffar om exakt en halv våglängd ryms på balkens längd, $L = \lambda/2$. Då är

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (42)$$



Figur 21. Utböjningsform för lägsta egenfrekvensen i böjsvängningen.

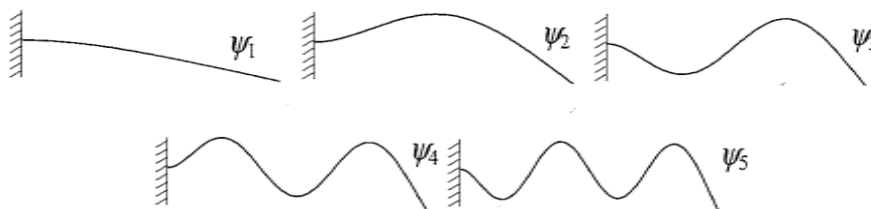


Från de uttrycken kan vi lösa ut egenfrekvensen för den lägsta egenfrekvensen

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho}} \quad (43)$$

Man får alltså en egenfrekvens för svängning i horisontalled och en för svängning i vertikalled genom att byta ut h från höjd till bredd. Högre egenfrekvenser, den n :te, kan man få genom att multiplicera f_0 med n^2 , där $n = 2, 3, 4$ osv, så att $f_n = f_0 \cdot n^2$. Mest rörelseenergi finner man dock vid den lägsta egenfrekvensen, så den är mest intressant att studera och lättast att hitta.

För en konsolbalk ser svängningarna lite annorlunda ut



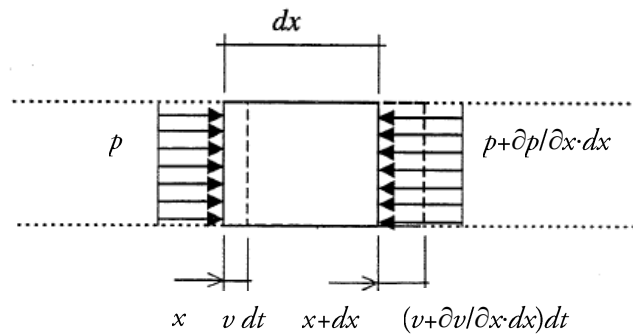
Figuren är från boken *Ljud och vibrationer* (Bodén m fl.) och visar olika svängningsformer som är kopplade till respektive egenfrekvens. Den viktigaste är i regel den lägsta då den innehåller mest rörelseenergi. Det kan dock vara viktigt om någon drivfrekvens skulle sammanfalla med någon av egenfrekvenserna.

Den här typen av svängningar behandlas mera utförligt i kursen Strukturdynamik som ges vid Byggnadsmekanikavdelningen.

Endimensionell vågutbredning i fluider

De fenomen man framför allt behandlar i akustiken är vågutbredning i fluider, nämligen ljudvågor i luft. Med fluider menar man medier som inte tar upp skjuvspänningar, det vill säga gaser och vätskor. Således gäller de ekvationer som vi kommer att ta fram här både för ljudutbredning i luft och i vatten. För att hitta vågekvationen skär vi ut en infinitesimal strimla av fluiden, frilägger denna, ställer upp rörelseekvationen och ser vad som händer. Fluidelementet har längden dx . Vidare har vi en massa per volymenhet, det vill säga densitet ρ . På den ena snittytan verkar ett tryck $p(x)=F/S$ och på den andra verkar samma tryck plus en viss förändring av denna, $p(x+dx) \approx p(x) + \partial p / \partial x \cdot dx$.

Förskjutningen av den vänstra snittytan betecknas med vibrationshastigheten v gånger ett litet tidstillskott dt , så $u = vdt$, medan förskjutningen av den högra snittytan betecknas $(v + \partial v / \partial x \cdot dx)dt$. Det bör här påpekas att med vibrationshastighet så menar vi den del av fluidens hastighet som fluktuerar, vi tar alltså inte med det konstanta flödet från exempelvis vind, fläktar eller strömmande vatten.



Figur 22. Fluidelement med tjockleken dx .

Vi ställer upp rörelseekvationen för fluidelementet

$$(\rightarrow) \quad F - \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = ma \quad (44)$$

Vi använder tryck istället för kraft ($p=F/S$), så:

$$pS - \left(pS + \frac{\partial p}{\partial x} dx S \right) = ma \quad (45)$$

Om dx är mycket litet så kan vi anta att massans förskjutning kan beskrivas enbart med u eller $v \, dt$:

$$m = \rho S \cdot dx \quad (46)$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (47)$$

Rörelseekvationen kan nu förenklas till

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (48)$$

För att komma vidare behöver vi nu ytterligare en ekvation som kan relatera krafterna med förskjutningarna. I fallet med en stång använde vi Hookes lag. När det gäller fluider, eller åtminstone om vi begränsar oss till gaser, så får vi använda den allmänna tillståndslagen för gaser. I fallet med vätskor kan man hitta motsvarande samband, som vi dock inte tar upp här. Vi börjar dock med att beskriva förändringen i vibrationshastigheten i relation till töjningen:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (49)$$



I Hookes lag har spänningen s och töjningen ε samma tecken. Detta beror på att dragning är positiv spänning medan tryck är negativ. Motsvarigheten till Hookes lag i luft måste därför ha negativt tecken. Vi kan då skriva:

$$p = -D\varepsilon \quad (50)$$

där D är bulkmodulen (eller volymstyvheden). Vad vi nu behöver är ett uttryck för denna. Från fysikkursens avsnitt om gasfysik känner vi till att allmänna gaslagen vid adiabatisk¹¹ kompression kan skrivas som

$$PV^\gamma = \text{konstant} \quad (51)$$

där P är tryck, V är volym och γ är kvoten mellan värmekapaciteterna $\gamma = C_p/C_v$. För tvåatomiga gaser, som luft, är $\gamma = 1.4$. Vi använder här stor bokstav för trycket P . Detta beror på att det här handlar om det totala trycket, som är uppbyggt av ett konstant atmosfärstryck P_0 samt ett vibrationstillskott $p(t)$ som vi är intresserade av, $P = P_0 + p(t)$.

Vi logaritermar och deriverar nu gaslagen för att få ett användbart uttryck.

$$\begin{aligned} \ln(PV^\gamma) &= \ln(\text{konstant}) \Rightarrow \ln(P) + \gamma \ln(V) = \ln(\text{konstant}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\ln(P) + \gamma \ln(V)) &= \frac{\partial}{\partial t}(\ln(\text{konstant})) \Rightarrow \frac{\partial P / \partial t}{P} + \gamma \frac{\partial V / \partial t}{V} = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Tidsdifferentialen dt finns i alla led och kan därför förkortas bort. Vidare kan vi approximera de båda andra differentialerna dP och dV med differenser

$$\frac{\partial P / \partial t}{P} + \gamma \frac{\partial V / \partial t}{V} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} + \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad (53)$$

Man kan nu se att $\Delta P = P(t) - P(0) = p(t)$ och att $\varepsilon = \Delta V / V$. Således har vi

$$\frac{p(t)}{P} + \gamma \varepsilon(t) = 0 \quad (54)$$

Som en sista approximation antar vi att man för små tryckförändringar kan ersätta det totala trycket P i nämnaren med det konstanta atmosfärstrycket P_0

$$\frac{p(t)}{P_0} + \gamma \varepsilon(t) = 0 \quad (55)$$

Vi flyttar om så att vi kan identifiera bulkmodulen

$$p(t) = -\gamma P_0 \varepsilon(t) \Rightarrow D = \gamma P_0 \quad (56)$$

¹¹ En adiabatisk tillståndsförändring betyder, som ni vet från fysikkursen, att processen sker utan värmetransport eller värmeförluster, det vill säga förlustfritt i vårt fall. Då man vill ta hänsyn till förluster, som i absorberer, tänker man sig istället isoterma tillståndsförändringar, $PV = \text{konstant}$.



Om vi kombinerar ekvation (49) med tidsderivatan av ekvation (56) så får vi den andra fältekvationen

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (57)$$

Om vi stoppar in ekvation (57) i (48), så har vi slutligen vågekvationen för en longitudinalvåg i luft (i en vätskevåg får vi använda en annan bulkmodul D):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\gamma P_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (58)$$

Som innan kan vi skriva vågekvationen för den fältvariabel som vi vill använda i varje specifikt fall. Dessa skriver vi dock inte ut denna gång. Ur ekvation (58) kan vi vidare identifiera våghastigheten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \quad (59)$$

För luft kan vi nu lätt beräkna våghastigheten. Luftens densitet är $\rho = 1.18 \text{ kg/m}^3$ vid 22°C och normalt atmosfärstryck som är $P_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Konstanten γ som relaterar värmekapaciteterna för konstant tryck och konstant volym, är $\gamma = 1.4$ för tvåatomiga gaser som luft. Således är ljudutbredningshastigheten för luft:

$$c = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 1.013 \cdot 10^5}{1.18}} = 347 \text{ m/s} \quad (60)$$

Luftens densitet är dock beroende av temperaturen, så om man vill vara noggrann får man modifiera formeln för ljudhastigheten:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho(T=0^\circ)}} \left(1 + \frac{T}{2 \cdot 273} \right) = 331.4 \cdot \left(1 + \frac{T}{2 \cdot 273} \right) \quad (61)$$

där T denna gång är temperaturen i grader Celsius. Vanligvis räknar man dock med $c = 340 \text{ m/s}$, vilket motsvarar $18\text{--}19^\circ\text{C}$. Om vi har en allmän fluid får vi istället använda bulkmodulen

$$c = \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad (62)$$



För sötvatten vid 20°C är bulkmodulen $D = 2.18 \cdot 10^9$ Pa. Som tidigare kan man använda andra fältvariabler än trycket i vågekvationen, till exempel partikelhastigheten¹² v . Vanligen beskriver man ljudet med trycket $p(x, t)$, men partikelhastigheten används också vilket vi snart ska se.

Harmonisk lösning till vågekvationen i luft

En harmonisk lösning till vågekvationen i luft uttryckt i tryck är

$$p(x, t) = \hat{p}_+ \cos(\omega t - kx) \quad (63)$$

för en våg som fortskrider i positiv x -riktning, eller uttryckt i komplex form

$$p(x, t) = \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (64)$$

Om man vill ta reda på vad partikelhastigheten är kan man använda rörelseekvationen

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow v = -\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \int -ik \cdot \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} dt = \frac{ik}{\rho} \frac{1}{i\omega} \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} = \frac{1}{\rho c} \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (65)$$

Detta är ett viktigt resultat och konstanterna framför uttrycket brukar få en egen beteckning. Vi definierar därför den specifika akustiska impedansen Z , eller vågimpedansen, som kvoten mellan det komplexa trycket och den komplexa hastigheten i den framåtskridande vågen:

$$Z \equiv \frac{p}{v} \quad (66)$$

Impedansen är i allmänhet en komplex storhet och innehåller alltså både amplitud och fas. För en endimensionell våg som färdas i positiv x -riktning blir $Z = Z_+$ en reell storhet

$$Z_+ = \frac{\hat{p}_+}{\hat{v}_+} = \rho c \quad (67)$$

För en våg som fortskrider i negativ x -riktning kan man visa att impedansen blir

$$Z_- = \frac{\hat{p}_-}{\hat{v}_-} = -\rho c \quad (68)$$

Impedans kan beskrivas som ett motstånd till rörelse, en hög impedans i mediet innebär att det krävs ett högt tryck för att åstadkomma en viss partikelhastighet. Mekanikens motsvarighet till impedansen är styvhet, alltså kraft

¹² Var observant på att partikelhastigheten $v(x, t) = \partial u(x, t) / \partial t$ skiljer sig från våghastigheten c . Den förra är hastigheten i varje ögonblick för fluidelementet eller partikeln som befinner sig vid x och den senare är hastigheten med vilken vågrörelsen utbreder sig.



genom förskjutning eller motstånd mot deformation. Vi kan också se det som en överföringsfunktion som diskuterades i avsnittet om SDOF.

Vid ljudövergångar mellan olika medier är det förhållandet mellan mediernas impedanser som avgör hur mycket av ljudenergin som transmittas in i det nya mediet och hur mycket som reflekteras. Vid 20°C och normalt lufttryck (och inget annat anges) brukar man räkna med impedansen för luft $Z_{\text{luft}} = 415 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$ och för sötvatten $Z_{\text{sötvatten}} = 1.48 \cdot 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$.

För fasta material brukar man istället använda sig av mekanisk vågimpedans, som definieras

$$Z = \frac{F}{v} \quad (69)$$

Ljudtrycksnivå

Vid praktiska ändamål är det osmidigt att använda tryckamplituden $\hat{p}$ som mått på ljudstyrkan. Det är vanligt inom signalområdet använda effektivvärdet för tryckfunktionen istället,

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt} \quad (70)$$

Där $\tilde{p}$ kallas effektivvärde eller rms-värde (root-mean-square – roten ur tidsmedelvärdet av trycket i kvadrat). För en periodisk signal, vilket vi kan utgå ifrån i akustiska sammanhang, så gäller att $\tilde{p} = \hat{p}/\sqrt{2}$. Inte heller detta är så praktiskt smidigt eftersom ljudtrycket har så stor spännvidd. Därför införde man tidigt måttet ljudtrycksnivå som definieras som

$$L_p = 10 \log \left(\frac{\tilde{p}^2}{p_{\text{ref}}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{\tilde{p}}{p_{\text{ref}}} \right) \quad \text{där } p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad (71)$$

L står för ljudnivå och index p indikerar att det är ljudtrycksnivån, till skillnad från andra som visas senare. I regel säger man lite kortare ljudnivå och då är det underförstått att det är ljudtrycksnivån som avses då denna är vanligast använd. Enheten för ljudnivå är decibel, dB.

Ljudintensitet och ljudeffekt

Ljudintensiteten definieras som ljudenergi per tidsenhet som passerar genom en areaenhet vinkelrät mot utbredningsriktningen. Från grundkursen i mekanik får vi uttrycket för effekt i varje ögonblick som

$$\Pi(t) = F(t) \cdot v(t) \quad (72)$$



där $\Pi(t)$ är ljudeffekten i W, $F(t)$ är kraften som verkar på areaenheten och $v(t)$ är partikelhastigheten. Ljudintensitet är alltså effekt per areaenhet

$$I(t) = \frac{d\Pi}{dS} \Rightarrow I(t) = \frac{\Pi(t)}{S} \quad (73)$$

om energin är jämnt fördelad över ytan S . Vi kan skriva den momentana ljudintensiteten som

$$I(t) = p(t) \cdot v(t) \quad (74)$$

Precis som med tryck och hastighet är det mer användbart med tidsmedelvärdet av ljudintensiteten

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad (75)$$

Tidsmedelvärdet av effekten (om energin är jämnt fördelad över S) är

$$\bar{\Pi} = \frac{S}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad (76)$$

Om vi begränsar oss till en endimensionell vågrörelse som färdas i positiv x -riktning så kan vi skriva trycket och partikelhastigheten på komplex form enligt

$$p(x, t) = \hat{p} e^{i(\omega t - kx)} \quad (77)$$

$$\text{och } v(x, t) = \hat{v} e^{i(\omega t - kx)} = \frac{\hat{p}}{\rho c} e^{i(\omega t - kx)} \quad (78)$$

Då blir tidsmedelvärdet av intensiteten i en aktuell punkt

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt = \frac{1}{\rho c} \cdot \tilde{p}^2 \quad (79)$$

där $\tilde{p}$ är tryckets effektivvärde. Man definierar också ljudintensitetsnivå (precis som L_p) enligt

$$L_I = 10 \log \left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}} \right) \quad \text{där } I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad (80)$$

Där $\bar{I}$ är absolutbeloppet av ljudintensitetsnivåns tidsmedelvärde. I_{ref} är referensstorheten för ljudintensitet. Det går även att på motsvarande sätt definiera ljudeffektsnivå som

$$L_{\Pi} = 10 \log \left(\frac{\bar{\Pi}}{\Pi_{ref}} \right) \quad \text{där } \Pi_{ref} = 10^{-12} \text{ W} \quad (81)$$



Viktiga formler – kap 2

Rörelseekvationen i fluider och fasta medier är

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}$$

Vidare gäller för fluider sambandet mellan tryck och partikelhastighet

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

För fasta medier har vi motsvarande samband mellan kraft och förskjutning

$$F = -ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vågekvationen för longitudinella vågor i en dimension uttryckt i ljudtryck är

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

där $c = \sqrt{\gamma P_0 / \rho}$ är utbredningshastigheten för tryckvågen i luft, $\gamma = 1.4$ och P_0 är atmosfärstryck. I fasta medier är utbredningshastigheten för longitudinella vågor $c = \sqrt{E / \rho}$. Även partikelförskjutning, partikelhastighet, töjning eller kraft kan användas istället för tryck som fältvariabel i vågekvationen.

Den allmänna lösningen till vågekvationen är

$$p(x, t) = p_+(t - x/c) + p_-(t + x/c)$$

Den harmoniska lösningen på vågekvationen på komplex form (för fysikalisk tolkning, ta realdelen av resultatet) är

$$p(x, t) = \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} + \hat{p}_- e^{i(\omega t + kx)}$$

där $\hat{p}_+$ och $\hat{p}_-$ är tryckamplituderna för vågorna som utbreder sig i positiv respektive negativ riktning. ω är vinkelfrekvensen och $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ är vågtalet. Det ger

$$c = f\lambda$$

Specifik akustisk impedans definieras som

$$Z \equiv \frac{p}{v}$$



För en framåtskridande våg i luft (1D utbredning i positiv x -riktning) blir den specifika akustiska impedansen

$$Z = \frac{p_+}{v_+} = \rho c$$

För skjuvvågor kan man uttrycka vågekvationen med den transversella förskjutningen w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{där } c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

För böjvågor i balkar och plattor blir vågekvationen i en dimension

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

där $B = E \frac{bh^3}{12}$ för rektangulärt tvärsnitt och utbredningshastigheten (fasens)

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{\rho S}}$$

Ljudenergi Π respektive ljudintensitet I är

$$\left. \begin{aligned} \Pi(t) &= F(t) \cdot v(t) \\ I(t) &= \frac{\Pi(t)}{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I(t) = p(t) \cdot v(t)$$

Utifrån ljudtrycket definieras ljudnivån som

$$L_p = 10 \log \left(\frac{\tilde{p}^2}{p_{ref}^2} \right) \quad \text{där } p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

Ljudeffektnivå och ljudintensitetsnivå beräknas utifrån respektive tidsmedelvärde enligt

$$L_{\Pi} = 10 \log \left(\frac{\bar{\Pi}}{\Pi_{ref}} \right) \quad \text{och} \quad L_I = 10 \log \left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}} \right)$$

där $\Pi_{ref} = 10^{-12} \text{ W}$ och $I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Tidsmedelvärdena är

$$\bar{\Pi} = \frac{S}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt$$

För en våg som fortplantar sig i positiv x -riktning gäller att $\bar{I} = \tilde{p}^2 / \rho c$.



3. Reflektion och transmission

Tidigare har vi behandlat vågutbredning i homogena medier utan att gå närmare in på vad som sker i övergången från ett medium till ett annat, eller vad som sker vid ränderna. Detta ska vi närmare gå in på här. Vi kan till exempel tänka oss en stång av stål som övergår i brons, eller en stång som är fri i ena änden och fast inspänd i den andra. Vi kan också tänka oss en ljudvåg i luft som faller in mot en betongvägg eller vattenyta.

Reflektion vid rand

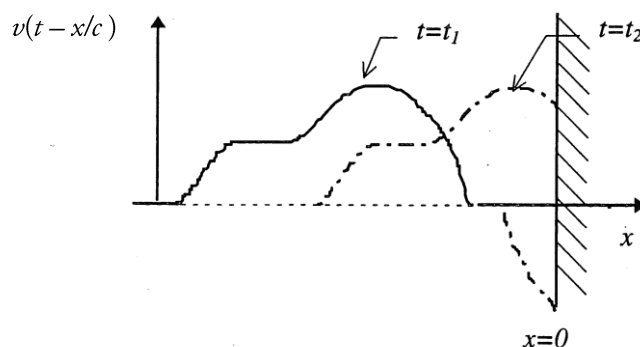
Vi börjar med att helt allmänt fundera över vad som kommer att ske när en våg når fram till en ideal rand. Vi tänker oss en våg i form av en puls av godtycklig form och att förskjutningen som vågen orsakar kan beskrivas med en hastighetsfunktion $v(x, t)$, som i bilden nedan ($t=t_1$). Innan vågpulsen har nått fram till randen så kan vågen beskrivas enbart med en framåtskridande vågfunktion $v(x, t) = v_+(t - x/c)$. Vågpulsen fortsätter sedan framåt och når fram till en hård rand ($t = t_2$). Med en hård rand menas här en stel vägg av ett material som har mycket större impedans än luften och därför reflekterar all ljudenergi.

Vid en övergång mellan två medier måste vissa randvillkor vara uppfyllda. Det är randvillkor i tryck (eller kraft) och det är randvillkor i hastighet (eller förskjutning). Genom att titta på en infinitesimalt smal bit med randen i mitten kan man se att trycket (eller kraften) på båda sidorna om randen måste vara lika och att hastigheten (eller förskjutningen) i de båda medierna på båda sidor om och intill randen måste vara lika. Vi kallar det kontinuitet i tryck och hastighet. Detta måste gälla vid alla ögonblick. Vi uttrycker det som

$$p(x=0_-, t) = p(x=0_+, t) \quad (1)$$

$$\text{och } v(x=0_-, t) = v(x=0_+, t) \quad (2)$$

där $x = 0_-$ innebär precis vid randen i det vänstra mediet och $x = 0_+$ innebär precis vid randen fast på den högra sidan. I fallet där det ena mediet är en stel yta vet vi att den är orörlig, det vill säga $v(x=0, t) = 0$. För en ljudvåg som faller in mot en stel vägg gäller alltså att partikelhastigheten precis intill väggen måste vara noll vid samtliga ögonblick.



Figur 23. Reflektion vid hård rand.



För att få detta randvillkor att gå ihop så måste vi lägga till en bakåtgående våg med negativt tecken som är lika stor som den framåtgående vågen, $v(t + x/c) = v_-(t + x/c)$. Den bakåtgående vågen är då den reflekterade vågen. Hela hastighetsfältet kan alltså beskrivas som

$$v(x, t) = v_+(t - x/c) + v_-(t + x/c) \quad (3)$$

Om nu hastighetsrandvillkoret ska vara uppfyllt måste hastigheten vara noll vid randen, alltså

$$v(0, t) = v_+(t) + v_-(t) = 0 \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$v_-(t) = -v_+(t) \quad (5)$$

så att

$$v(x, t) = v_+(t - x/c) - v_+(t + x/c) \quad (6)$$

Om vi utgår från en harmonisk vågfunktion som vi uttrycker på komplex form med den framåtskridande och den bakåtskridande termen

$$v(x, t) = \hat{v}_+ e^{i(\omega t - kx)} - \hat{v}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (7)$$

Genom att bryta ut amplituden och tidsdelen av den harmoniska svängningsrörelsen kan vi skriva detta som

$$v(x, t) = \hat{v}_+ (e^{-ikx} - e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (8)$$

Med Eulers former kan denna relation skrivas om som

$$v(x, t) = -2i\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i\omega t} = 2\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i(\omega t - \pi/2)} \quad (9)$$

Det intressanta är att vi har ett vågmönster som är en funktion av läget. Vid de positioner där sinusfunktionen är 1 eller -1 kommer rörelsen att vara stor medan i de positioner där sinusfunktionen är 0 så kommer inget att röra sig. Vi har en stående våg, till skillnad från en fortskridande våg. Vid en pir eller skarp brygga reflekteras de infallande vågorna mycket väl, och ett stående vågmönster uppkommer.

När man har mer än en rand (i ett endimensionellt fall) kan det stående vågmönstret passa extra bra med ränderna och man får resonans, vilket vi strax återkommer till.

För att ta reda på var hastigheten är maximal och var den är noll så löser vi ekvationen

$$\sin(kx) = 0 \quad (x < 0) \quad (10)$$

vilket har lösningen



$$kx = -n\pi \quad (11)$$

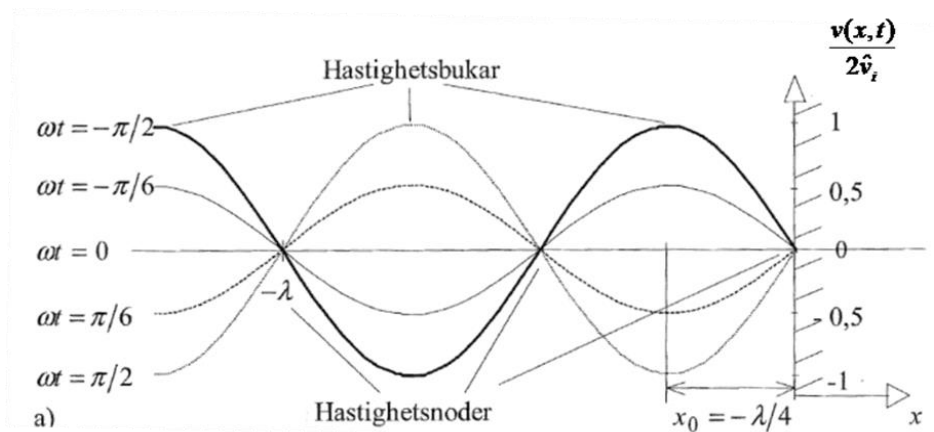
$$x = -\frac{n\pi}{k} = -\frac{n\pi}{2\pi/\lambda} = -\frac{n\lambda}{2} \quad (12)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv. Minustecknet kommer av att vi befinner oss till vänster om väggen, alltså $x < 0$.

Som väntat, och som randvillkoret föreskriver, är partikelhastigheten alltid noll vid $x=0$, men också vid ett jämnt antal halva våglängder ut från randen. En punkt där svängningen alltid är noll kallas nod. Mitt emellan hastighetsnoderna, där sinusfunktionen är maximal, är svängningen maximal, vilket kallas buk. Dessa ligger vid

$$x = -\frac{\lambda}{4} - \frac{n\lambda}{2} \quad (13)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv.



Figur 24. Hastighetsnoder och bukar

Detta är ett viktigt resultat som vi kommer att se senare. Det visar sig att om vi ska försöka absorbera ljudvågen som kommer in mot en hård vägg med en absorbent, till exempel en mineralullsplatta, så ska vi försöka placera den i en hastighetsbuk, där mest rörelseenergi kan överföras till absorbenten, alltså $\lambda/4$ ut från väggen. I en hastighetsnod kommer ingen rörelseenergi att överföras. Mer om detta i kapitlet om rumsakustik.

Vad innebär då detta för trycket? Med hjälp av impedansen i båda riktningarna kan vi skriva tryckfunktionen som

$$p(x,t) = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\hat{v}_+}{-\rho c} e^{i(\omega t + kx)} = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (14)$$

som också den kan skrivas om med Eulers ekvationer

$$p(x,t) = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} = 2\hat{p}_+ \cos(kx) \cdot e^{i\omega t} \quad (15)$$



och speciellt vid randen, där cosinustermen blir 1

$$p(0,t) = 2\hat{p}_+ e^{i\omega t} \quad (16)$$

Vid randen har alltså tryckfunktionen ett maximum, en tryckbuk, där amplituden är dubbelt så stor som för den infallande vågen. Trycknoder hittar vi när vi löser ekvationen

$$\cos(kx) = 0 \quad (x < 0) \quad (17)$$

$$kx = -\frac{\pi}{2} - n\pi \quad (18)$$

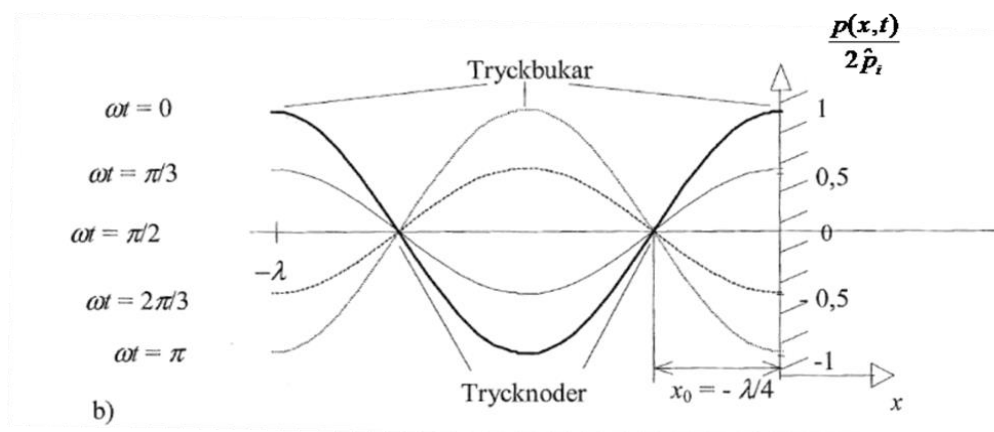
$\Rightarrow$

$$x = -\frac{\pi}{2k} - \frac{n\pi}{k} = -\frac{\lambda}{4} - \frac{n\lambda}{2} = -\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv. Maximum, tryckbukar, hittar vi däremellan vid $x = -\lambda/2, -\lambda, -3\lambda/2$ osv. Vi kan också observera i figuren att randvillkoret för ljudtrycket vid en hård rand är

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (20)$$

Det läses "rumsderivatan för tryckfunktionen, insatt $x = 0$, är noll". Alltså, lutningen för tryckamplituden i Figur 25 är noll vid den hårda ytan. Det kan också visas med hastighetsrandvillkoren och rörelselagen. Detta har en mycket viktig praktisk konsekvens vid mätning av ljudnivå i närheten av hårda ytor. Om man har en infallande våg där man ska mäta ljudnivå med en mikrofon (som mäter ljudtrycket) som faller in mot en hård yta, till exempel en husvägg, så kommer mätresultatet att bero på hur långt från ytan man mäter. Sätter man mikrofonen intill ytan mäter man en tryckamplitud som är dubbelt så stor som endast den infallande vågens (det senare kallas frifältsvärde). Man kan se det som att den infallande vågen interfererar konstruktivt med den reflekterade.



Figur 25. Trycknoder och bukar.



Två hårda randytor

Nu ska vi undersöka vad som händer om vi ställer två hårda ytor mitt emot varandra, en vid $x = 0$ och en vid $x = L$. Fortfarande begränsar vi oss till endimensionell vågutbredning. Vi ställer åter upp vågekvationen med tryck som fältvariabel

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

Vi ansätter en lösning bestående av en harmonisk tidsberoende faktor och en lägesberoende faktor på den mest generella formen

$$p(x, t) = p(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (22)$$

Sätter vi in denna ansats i vågekvationen får vi

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} e^{i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} p(x) e^{i\omega t} = 0 \quad (23)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k^2 p(x) = 0 \quad (24)$$

Detta kallas Helmholtz ekvation i en dimension och är en ordinär andra ordningens differentialekvation. Detta gör problemet enklare att arbeta med, och ofta används denna ekvation direkt. Differentialekvationen har den allmänna lösningen

$$p(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (25)$$

Vi sätter nu in för de givna randvillkoren att rumsderivatan för tryckfunktionen ska vara noll vid vänstra randen

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (26)$$

$\Rightarrow$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = Ak \cos(kx) - Bk \sin(kx) \Big|_{x=0} = Ak \cos(0) - Bk \sin(0) = Ak = 0 \quad (27)$$

$$\Rightarrow A = 0$$

och därför blir $p(x) = B \cos(kx)$. Rumsderivatan ska vara noll också vid den andra randen



$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Bk \sin(kx) \Big|_{x=L} = Bk \sin(kL) = 0 \quad (28)$$

vilket innebär att

$$\sin(kL) = 0 \quad (29)$$

$\Rightarrow$

$$k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n} \quad (30)$$

där $n = 1, 2, 3, \dots$. Det vi har räknat ut är alltså de k_n respektive λ_n för vilken vågekvationen har en lösning som är skild från noll. Dessa k_n och λ_n svarar mot egenfrekvenserna

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} n \quad (31)$$

Detta innebär alltså att vi har resonans vid dessa frekvenser, f_1, f_2, f_3 osv. Precis som för sdof-systemet så innebär resonans här att om vi sänder ut ljud i rummet med en drivfrekvens som är lika med någon av rummets resonansfrekvens så kommer systemet – rummet – att förstärka den signalen. Det kan man enkelt undersöka själv genom att sjunga med olika toner i ett kaklat badrum. Vissa toner kommer att ljuda mycket högre och tydligare än andra. När man prickar en sådan ton har man hittat en resonansfrekvens, eller egenfrekvens.

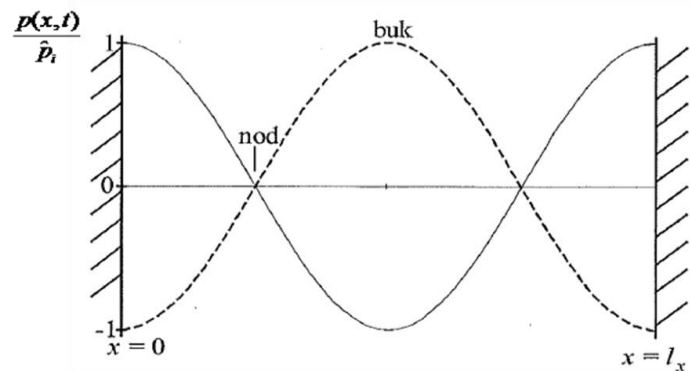
För varje egenfrekvens hör en form på amplitudkurvan som är lägesdelen av lösningen på vågekvationen för respektive f_n . Den kan vi uttrycka som

$$p(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (32)$$

där B är den konstanta amplituden. Den fullständiga tryckfunktionen är alltså

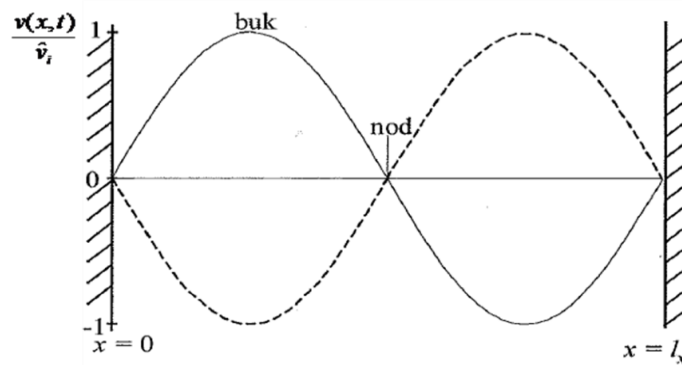
$$p(x, t) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{i2\pi f_n t} \quad (33)$$

där vi lagt till den harmoniska delen med $\omega = 2\pi f_n$. I figuren nedan ser vi de tre första egenmoderna som svarar mot de tre lägsta egenfrekvenserna. Våglängden för den lägsta egenfrekvensen blir $\lambda = 2L$.



Figur 26. Egenmoder, eller svängningsformer, för tryck vid egensvängning.

Vi kan se motsvarande modformer för hastighetsfunktionen, fast förskjuten så att den alltid är noll vid ränderna. Hastighetsmoderna är likadana som egensvängningarna i en sträng.



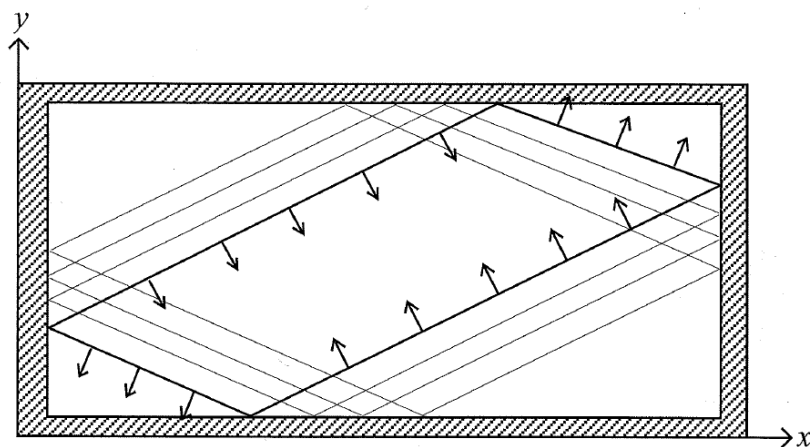
Figur 27. Egenmoder för hastigheten vid egensvängning.

Sex hårda randytor

Om vi löser samma problem i tre dimensioner, i ett rum med skokartongsform och dimensionerna L , B och H , kommer egenfrekvenserna att bli

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{H}\right)^2} \quad (34)$$

Här kan n_x , n_y och n_z anta alla heltalsvärden. Nu är modformerna inte bara endimensionella i någon av riktningarna (endast ett $n \neq 0$) utan vågorna kan även utbreda sig diagonalt i något plan (två st $n \neq 0$) eller utefter rymddiagonalen (samtliga tre $n \neq 0$).



Figur 28. Vågutbredning för diagonal svängningsform.

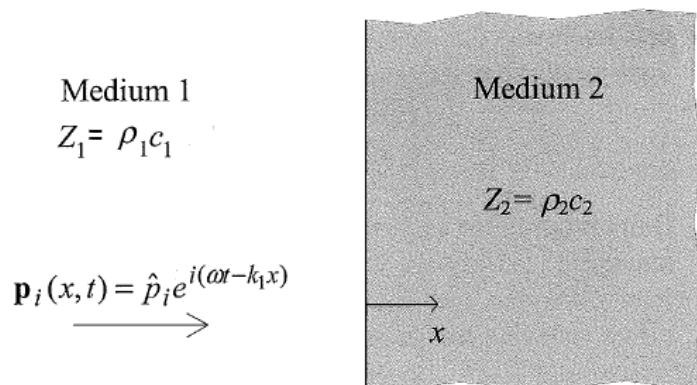
Eigenfrekvenserna uppträder glest i början, vid de låga frekvenserna, men blir tätare och tätare ju högre upp i frekvens man kommer. Det innebär att ju lägre i frekvens man tittar, desto mera kommer ljudnivån att variera för olika positioner i rummet beroende på om man hittar en nod eller en buk. För högre frekvenser är det tätare mellan egenfrekvenserna, både i frekvens och i fysiskt avstånd och ljudfältet kan anses som mera slumpmässigt.

Egensvängningar i balkar och plattor behandlas i ett eget avsnitt senare.

Reflektions- och transmissionsfaktorer

Ovan har vi utgått från stela väggar som reflekterar allt inkommande ljud. Men i praktiken kommer alltid en viss andel av ljudtrycket och ljudintensiteten att transmittas genom väggen. Hur mycket som transmittas avgörs av förhållandet i impedans mellan de båda medierna, som vi snart ska se.

När en ljudvåg träffar en skiljeyta mellan två medier, t ex luft och vatten, kommer en del av den infallande vågens effekt att reflekteras och en del att transmittas. I Figur 29 betraktar vi skiljeytan mellan ett medium med vågimpedansen $Z_1 = \rho_1 c_1$ och ett medium med vågimpedansen $Z_2 = \rho_2 c_2$.



Figur 29. Infallande våg mot skiljeyta mellan två olika media.



I medium 1 har vi en plan våg

$$p_i(x, t) = \hat{p}_i e^{i(\omega t - kx)} \quad (35)$$

som faller in vinkelrätt mot en plan skiljeyta vid $x = 0$ (index i står för infallande) och en reflekterad våg (index r)

$$p_r(x, t) = \hat{p}_r e^{i(\omega t + kx)} \quad (36)$$

Totalt ljudtryck i medium 1 är alltså $p_{tot1} = p_i + p_r$. I medium 2 har vi enbart en transmitterad plan våg

$$p_t(x, t) = \hat{p}_t e^{i(\omega t - kx)} \quad (37)$$

När vi betraktar hastigheten för två partiklar precis vid vänster om randen $p_{tot1}(0-, t)$ och precis till höger om randen $p_t(0+, t)$ så måste de vara lika för alla tidpunkter, vilket kallas kontinuitet i tryck

$$\hat{p}_i + \hat{p}_r = \hat{p}_t \quad (38)$$

Med hjälp av impedansen kan vi uttrycka vågorna som hastigheter

$$v_i(x, t) = \frac{\hat{p}_i}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t - kx)} \quad (39)$$

$$v_r(x, t) = -\frac{\hat{p}_r}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t + kx)} \quad (40)$$

$$v_t(x, t) = \frac{\hat{p}_t}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega t - kx)} \quad (41)$$

Med $v_{tot1} = v_i + v_r$ måste motsvarande kontinuitet även gälla hastighet precis till vänster och till höger om randen

$$\frac{\hat{p}_i}{\rho_1 c_1} - \frac{\hat{p}_r}{\rho_1 c_1} = \frac{\hat{p}_t}{\rho_2 c_2} \quad (42)$$

Från de båda ekvationerna kan $\hat{p}_t$ elimineras och sambandet $\hat{p}_r / \hat{p}_i$ lösas ut. Förhållandet mellan reflekterad och infallande våg kallas reflektionsfaktor och betecknas r . Vi får att

$$r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (43)$$

Reflektionsfaktorn r är positiv om $\rho_2 c_2$ är större än $\rho_1 c_1$ och negativ om $\rho_2 c_2$ är mindre än $\rho_1 c_1$ (t ex luft till vatten eller, resp. vatten till luft). Om $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$ blir $r = 0$ som väntat.



Vi kan definiera en transmissionsfaktor t genom att teckna ett liknade förhållande mellan transmitterad och infallande våg

$$t = \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (44)$$

Transmissionskoefficienten τ definieras som förhållandet mellan transmitterad och infallande ljudintensitet, d v s

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} \quad (45)$$

Sambandet mellan ljudintensitet (tidsmedelvärde) och ljudtryck (effektivvärde) är $I = \tilde{p}^2 / \rho c$. Om ingen energi förloras i gränsskiktet gäller att

$$I_i = I_r + I_t \quad (46)$$

Med ovanstående samband får vi att

$$\tau = 1 - \frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{p_r^2}{p_i^2} \quad (47)$$

d v s sambandet mellan transmissionskoefficient τ och reflektionsfaktorn r är

$$\tau = 1 - r^2 \quad (48)$$

Vi kan istället införa en reflektionskoefficient $\rho = r^2$ som anger hur stor andel av infallande intensitet som reflekteras¹³, så att

$$\tau + \rho = 1 \quad (49)$$

Alltså, andel transmitterad intensitet + andel reflekterad intensitet = 1.

Vi kan uttrycka koefficienterna ovan med hjälp av impedanserna för de både medierna enligt

$$\rho = r^2 = \frac{|\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1|^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{|Z_2 - Z_1|^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (50)$$

$$\tau = \frac{4\rho_2 c_2 \cdot \rho_1 c_1}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (51)$$

¹³ Ej att förväxlas med densiteten.



Viktiga samband – kap 3

Vid normalt infall mot en hård randyta blir tryckfunktionen

$$p(x, t) = 2\hat{p}_+ \cos(kx) \cdot e^{i\omega t}$$

och hastighetsfunktionen

$$v(x, t) = 2\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k^2 p(x) = 0$$

har i det endimensionella fallet med två hårda randtor vid $x = 0$ och $x = L$ lösningen

$$p(x, t) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{i2\pi f_n t}$$

där f_n är resonansfrekvenserna

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} n$$

I det tredimensionella fallet med sex hårda randtor blir egenfrekvenserna

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{H}\right)^2}$$

Vid övergång från ett medium med vågimpedansen $Z_1 = \rho_1 c_1$ till ett medium med vågimpedansen $Z_2 = \rho_2 c_2$ blir transmissionsfaktorn t och reflektionsfaktorn r

$$t = \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \qquad r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

medan transmissionskoefficienten τ och reflektionskoefficienten ρ blir

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4\rho_2 c_2 \cdot \rho_1 c_1}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \qquad \rho = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1|^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{|Z_2 - Z_1|^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$