

Reflektion och transmission

Tidigare har vi behandlat vågutbredning i homogena medier utan att gå närmare in på vad som sker i övergången från ett medium till ett annat, eller vad som sker vid ränderna. Detta ska vi närmare gå in på här. Vi kan till exempel tänka oss en stång av stål som övergår i brons, eller en stång som är fri i ena änden och fast inspänd i den andra. Vi kan också tänka oss en ljudvåg i luft som faller in mot en betongvägg eller vattenyta.

Reflektion vid rand

Vi börjar med att helt allmänt fundera över vad som kommer att ske när en våg når fram till en ideal rand. Vi tänker oss en våg i form av en puls av godtycklig form och att förskjutningen som vågen orsakar kan beskrivas med en hastighetsfunktion $v(x,t)$, som i bilden nedan ($t = t_1$). Innan vågpulsen har nått fram till randen så kan vågen beskrivas enbart med en framåtskridande vågfunktion $v(x,t) = v_+(t - x/c)$. Vågpulsen fortsätter sedan framåt och når fram till en hård rand ($t = t_2$). Med en hård rand menas här en stel vägg av ett material som har mycket större impedans än luften och därför reflekterar all ljudenergi.

Vid en övergång mellan två medier måste vissa randvillkor vara uppfyllda. Det är randvillkor i tryck (eller kraft) och det är randvillkor i hastighet (eller förskjutning). Genom att titta på en infinitesimalt smal bit med randen i mitten kan man se att trycket (eller kraften) på båda sidorna om randen måste vara lika och att hastigheten (eller förskjutningen) i de båda medierna på båda sidor om och intill randen måste vara lika. Vi kallar det kontinuitet i tryck och hastighet. Detta måste gälla vid alla ögonblick. Vi uttrycker det som

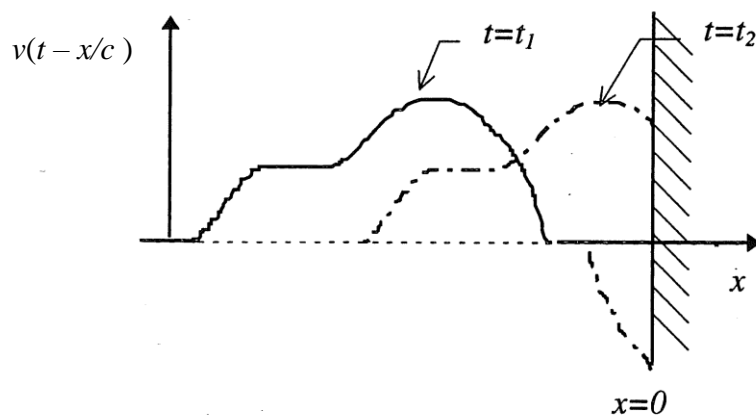
$$p(x = 0_-, t) = p(x = 0_+, t) \quad (1)$$

och

$$v(x = 0_-, t) = v(x = 0_+, t) \quad (2)$$

där $x = 0_-$ innebär precis vid randen i det vänstra mediet och $x = 0_+$ innebär precis vid randen fast på den högra sidan.

I fallet där det ena mediet är en stel yta vet vi att den är orörlig, det vill säga $v(x=0_+, t) = 0$. För en ljudvåg som faller in mot en stel vägg gäller alltså att partikelhastigheten precis intill väggen måste vara noll vid samtliga ögonblick.



Figur 1. Reflektion vid hård rand.

För att få detta randvillkor att gå ihop så måste vi lägga till en bakåtgående våg med negativt tecken som är lika stor som den framåtgående vågen, $v(t+x/c) = -v(t+x/c)$. Den bakåtgående vågen är då den reflekterade vågen. Hela hastighetsfältet kan alltså beskrivas som

$$v(x,t) = v_+(t-x/c) + v_-(t+x/c) \quad (3)$$

Om nu hastighetsrandvillkoret ska vara uppfyllt måste hastigheten vara noll vid randen, alltså

$$v(0,t) = v_+(t) + v_-(t) = 0 \quad (4)$$

⇒

$$v_-(t) = -v_+(t) \quad (5)$$

så att

$$v(x,t) = v_+(t-x/c) - v_+(t+x/c) \quad (6)$$

Om vi utgår från en harmonisk vågfunktion som vi uttrycker på komplex form med den framåtskridande och den bakåtskridande termen

$$v(x,t) = \hat{v}_+ e^{i(\omega t - kx)} - \hat{v}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (7)$$

Genom att bryta ut amplituden och tidsdelen av den harmoniska svängningsrörelsen kan vi skriva detta som

$$v(x,t) = \hat{v}_+ (e^{-ikx} - e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (8)$$

Med Eulers former kan denna relation skrivas om som

$$v(x,t) = -2i\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i\omega t} = 2\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i(\omega t - \pi/2)} \quad (9)$$

Det intressanta är att vi har ett vågmönster som är en funktion av läget. Vid de positioner där sinusfunktionen är 1 eller -1 kommer rörelsen att vara stor medan i de positioner där sinusfunktionen är 0 så kommer inget att röra sig. Vi har en stående våg, till skillnad från en fortskridande våg. Vid en pir eller skarp brygga reflekteras de infallande vågorna mycket väl, och ett stående vågmönster uppkommer.

När man har mer än en rand (i ett endimensionellt fall) kan det stående vågmönstret passa extra bra med ränderna och man får resonans, vilket vi strax återkommer till.

För att ta reda på var hastigheten är maximal och var den är noll så löser vi ekvationen

$$\sin(kx) = 0 \quad (x < 0) \quad (10)$$

vilket har lösningen

$$kx = -n\pi \quad (11)$$

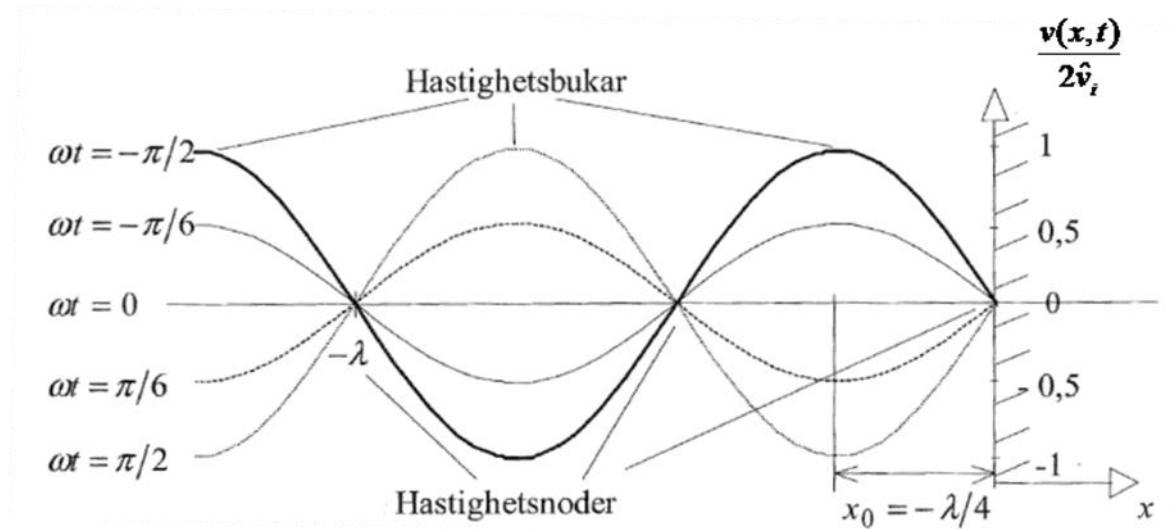
$$x = -\frac{n\pi}{k} = -\frac{n\pi}{2\pi/\lambda} = -\frac{n\lambda}{2} \quad (12)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv. Minustecknet kommer av att vi befinner oss till vänster om väggen, alltså $x < 0$.

Som väntat, och som randvillkoret föreskriver, är partikelhastigheten alltid noll vid $x = 0$, men också vid ett jämnt antal halva våglängder ut från randen. En punkt där svängningen alltid är noll kallas nod. Mitt emellan hastighetsnoderna, där sinusfunktionen är maximal, är svängningen maximal, vilket kallas buk. Dessa ligger vid

$$x = -\frac{\lambda}{4} - \frac{n\lambda}{2} \quad (13)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv.



Figur 2. Hastighetsnoder och bukar

Detta är ett viktigt resultat som vi kommer att se senare. Det visar sig att om vi ska försöka absorbera ljudvågen som kommer in mot en hård vägg med en absorbent, till exempel en mineralullsplatta, så ska vi försöka placera den i en hastighetsbuk, där mest rörelseenergi kan överföras till absorbenten, alltså $\lambda/4$ ut från väggen. I en hastighetsnod kommer ingen rörelseenergi att överföras. Mer om detta i kapitlet om rumsakustik.

Vad innebär då detta för trycket? Med hjälp av impedansen i båda riktningarna kan vi skriva tryckfunktionen som

$$p(x,t) = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} e^{i(\omega t - kx)} - \frac{\hat{v}_+}{-\rho c} e^{i(\omega t + kx)} = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} \quad (14)$$

som också den kan skrivas om med Eulers ekvationer

$$p(x,t) = \frac{\hat{v}_+}{\rho c} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \cdot e^{i\omega t} = 2\hat{p}_+ \cos(kx) \cdot e^{i\omega t} \quad (15)$$

och speciellt vid randen, där cosinustermen blir 1

$$p(0,t) = 2\hat{p}_+ e^{i\omega t} \quad (16)$$

Vid randen har alltså tryckfunktionen ett maximum, en tryckbuk, där amplituden är dubbelt så stor som för den infallande vågen. Trycknoder hittar vi när vi löser ekvationen

$$\cos(kx) = 0 \quad (x < 0) \quad (17)$$

$$kx = -\frac{\pi}{2} - n\pi \quad (18)$$

⇒

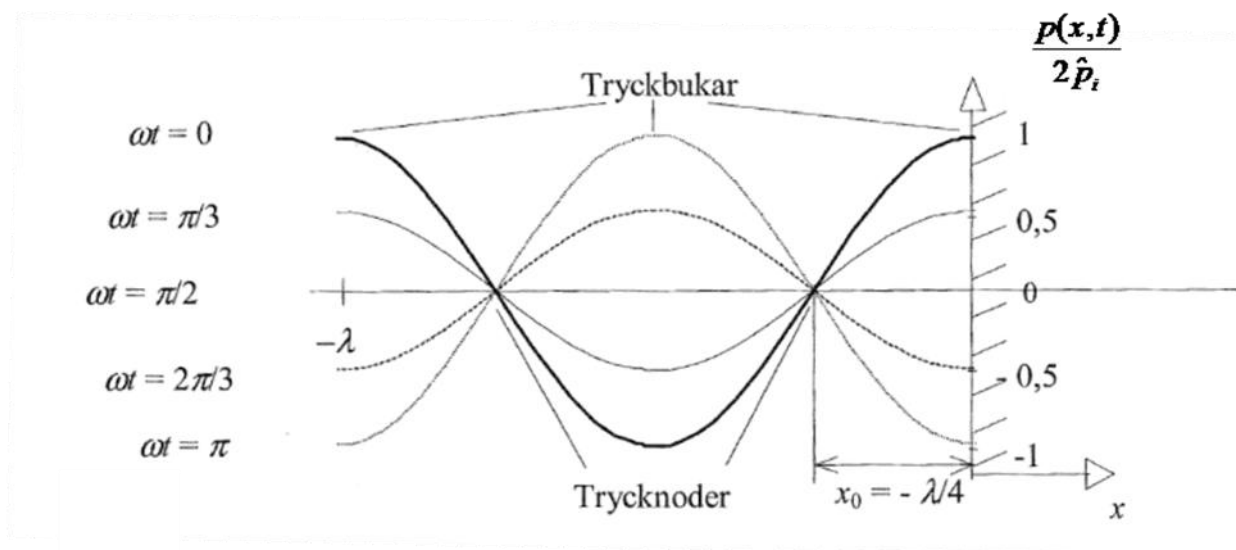
$$x = -\frac{\pi}{2k} - \frac{n\pi}{k} = -\frac{\lambda}{4} - \frac{n\lambda}{2} = -\left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{\lambda}{2} \quad (19)$$

där $n = 0, 1, 2, \dots$ osv. Maximum, tryckbukar, hittar vi däremellan vid $x = -\lambda/2, -\lambda, -3\lambda/2$ osv. Vi kan också observera i figuren att randvillkoret för ljudtrycket vid en hård rand är

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (20)$$

Det läses ”rumsderivatan för tryckfunktionen, insatt $x = 0$, är noll”. Alltså, lutningen för tryckamplituden i Figur 3 är noll vid den hårda ytan. Det kan också visas med hastighetsrandvillkoren och rörelselagen.

Detta har en mycket viktig praktisk konsekvens vid mätning av ljudnivå i närheten av hårda ytor. Om man har en infallande våg där man ska mäta ljudnivå med en mikrofon (som mäter ljudtrycket) som faller in mot en hård yta, till exempel en husvägg, så kommer mätresultatet att bero på hur långt från ytan man mäter. Sätter man mikrofonen intill ytan mäter man en tryckamplitud som är dubbelt så stor som endast den infallande vågens (det senare kallas frifältsvärde). Man kan se det som att den infallande vågen interfererar konstruktivt med den reflekterade.



Figur 3. Trycknoder och bukar.

Två hårda randytor

Nu ska vi undersöka vad som händer om vi ställer två hårda ytor mitt emot varandra, en vid $x = 0$ och en vid $x = L$. Fortfarande begränsar vi oss till endimensionell vågutbredning. Vi ställer åter upp vågekvationen med tryck som fältvariabel

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

Vi ansätter en lösning bestående av en harmonisk tidsberoende faktor och en lägesberoende faktor på den mest generella formen

$$p(x, t) = p(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (22)$$

Sätter vi in denna ansats i vågekvationen får vi

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} e^{i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} p(x) e^{i\omega t} = 0 \quad (23)$$

\Rightarrow

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k^2 p(x) = 0 \quad (24)$$

Detta kallas Helmholtz ekvation i en dimension och är en ordinär andra ordningens differentialekvation. Detta gör problemet enklare att arbeta med, och ofta används denna ekvation direkt. Differentialekvationen har den allmänna lösningen

$$p(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (25)$$

Vi sätter nu in för de givna randvillkoren att rumsderivatan för tryckfunktionen ska vara noll vid vänstra randen

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (26)$$

\Rightarrow

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = Ak \cos(kx) - Bk \sin(kx) \Big|_{x=0} = Ak \cos(0) - Bk \sin(0) = Ak = 0 \quad (27)$$

$$\Rightarrow A = 0$$

och därför blir $p(x) = B \cos(kx)$. Rumsderivatan ska vara noll också vid den andra randen

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L} = Bk \sin(kx) \Big|_{x=L} = Bk \sin(kL) = 0 \quad (28)$$

vilket innebär att

$$\sin(kL) = 0 \quad (29)$$

\Rightarrow

$$k_n L = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n} \quad (30)$$

där $n = 1, 2, 3, \dots$. Det vi har räknat ut är alltså de k_n respektive λ_n för vilken vågekvationen har en lösning som är skild från noll. Dessa k_n och λ_n svarar mot egenfrekvenserna

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} n \quad (31)$$

Detta innebär alltså att vi har resonans vid dessa frekvenser, f_1, f_2, f_3 osv. Precis som för sdoF-systemet så innebär resonans här att om vi sänder ut ljud i rummet med en drivfrekvens som är lika med någon av rummets resonansfrekvens så kommer systemet – rummet – att förstärka den signalen. Det kan man enkelt undersöka själv genom att sjunga med olika toner i ett kaklat badrum. Vissa toner kommer att ljuda mycket högre och tydligare än andra. När man prickar en sådan ton har man hittat en resonansfrekvens, eller egenfrekvens.

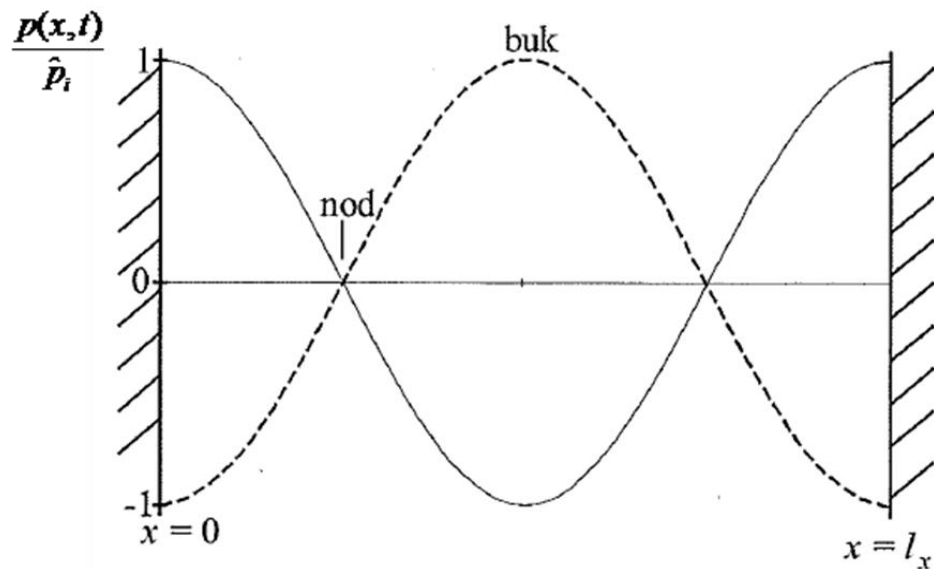
För varje egenfrekvens hör en form på amplitudkurvan som är lägesdelen av lösningen på vågekvationen för respektive f_n . Den kan vi uttrycka som

$$p(x) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (32)$$

där B är den konstanta amplituden. Den fullständiga tryckfunktionen är alltså

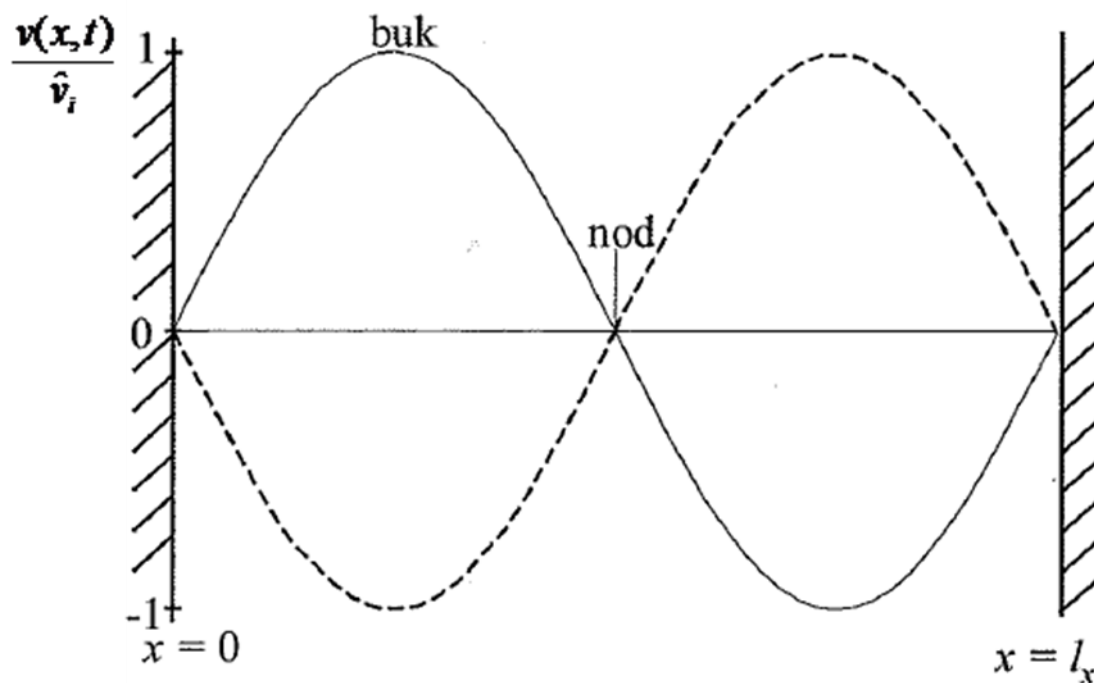
$$p(x,t) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{i2\pi f_n t} \quad (33)$$

där vi lagt till den harmoniska delen med $\omega = 2\pi f_n$. I figuren nedan ser vi de tre första egenmoderna som svarar mot de tre lägsta egenfrekvenserna. Våglängden för den lägsta egenfrekvensen blir $\lambda = 2L$.



Figur 4. Egenmoder, eller svängningsformer, för tryck vid egensvängning.

Vi kan se motsvarande modformer för hastighetsfunktionen, fast förskjuten så att den alltid är noll vid ränderna. Hastighetsmoderna är likadana som egensvängningarna i en sträng.



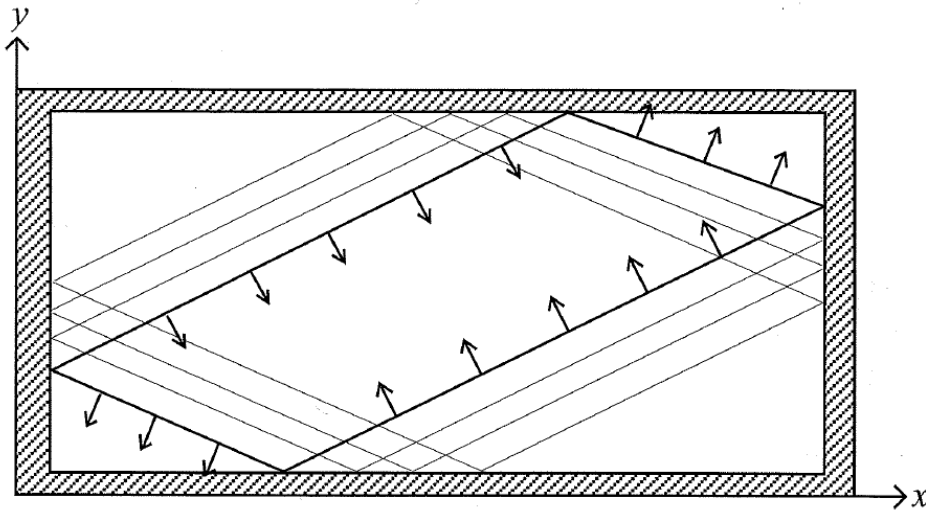
Figur 5. Egenmoder för hastigheten vid egensvängning.

Sex hårda randytor

Om vi löser samma problem i tre dimensioner, i ett rum med skokartongsform och dimensionerna L , B och H , kommer egenfrekvenserna att bli

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{H}\right)^2} \quad (34)$$

Här kan n_x , n_y och n_z anta alla heltalsvärden. Nu är modformerna inte bara endimensionella i någon av riktningarna (endast ett $n \neq 0$) utan vågorna kan även utbreda sig diagonalt i något plan (två st $n \neq 0$) eller utefter rymddiagonalen (samtliga tre $n \neq 0$).



Figur 6. Vågutbredning för diagonal svängningsform.

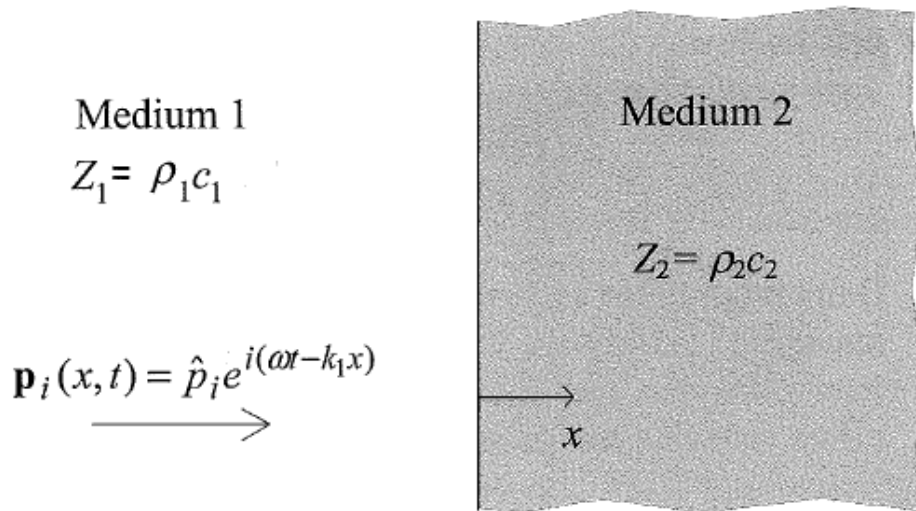
Egenfrekvenserna uppträder glest i början, vid de låga frekvenserna, men blir tätare och tätare ju högre upp i frekvens man kommer. Det innebär att ju lägre i frekvens man tittar, desto mera kommer ljudnivån att variera för olika positioner i rummet beroende på om man hittar en nod eller en buk. För högre frekvenser är det tätare mellan egenfrekvenserna, både i frekvens och i fysiskt avstånd och ljudfältet kan anses som mera slumpmässigt.

Egensvängningar i balkar och plattor behandlas i ett eget avsnitt senare.

Reflektions- och transmissionsfaktorer

Ovan har vi utgått från stela väggar som reflekterar allt inkommande ljud. Men i praktiken kommer alltid en viss andel av ljudtrycket och ljudintensiteten att transmittas genom väggen. Hur mycket som transmittas avgörs av förhållandet i impedans mellan de båda medierna, som vi snart ska se.

När en ljudvåg träffar en skiljeyta mellan två medier, t ex luft och vatten, kommer en del av den infallande vågens effekt att reflekteras och en del att transmittas. I Figur 7 betraktar vi skiljeytan mellan ett medium med vågimpedansen $Z_1 = \rho_1 c_1$ och ett medium med vågimpedansen $Z_2 = \rho_2 c_2$.



Figur 7. Infallande våg mot skiljeyta mellan två olika media.

I medium 1 har vi en plan våg

$$p_i(x,t) = \hat{p}_i e^{i(\omega t - kx)} \quad (35)$$

som faller in vinkelrätt mot en plan skiljeyta vid $x = 0$ (index i står för infallande) och en reflekterad våg (index r)

$$p_r(x,t) = \hat{p}_r e^{i(\omega t + kx)} \quad (36)$$

Totalt ljudtryck i medium 1 är alltså $p_{tot1} = p_i + p_r$. I medium 2 har vi enbart en transmitterad plan våg

$$p_t(x,t) = \hat{p}_t e^{i(\omega t - kx)} \quad (37)$$

När vi betraktar hastigheten för två partiklar precis vid vänster om randen $p_{tot1}(0_-, t)$ och precis till höger om randen $p_t(0_+, t)$ så måste de vara lika för alla tidpunkter, vilket kallas kontinuitet i tryck

$$\hat{p}_i + \hat{p}_r = \hat{p}_t \quad (38)$$

Med hjälp av impedansen kan vi uttrycka vågorna som hastigheter

$$v_i(x, t) = \frac{\hat{p}_i}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t - kx)} \quad (39)$$

$$v_r(x, t) = -\frac{\hat{p}_r}{\rho_1 c_1} e^{i(\omega t + kx)} \quad (40)$$

$$v_t(x, t) = \frac{\hat{p}_t}{\rho_2 c_2} e^{i(\omega t - kx)} \quad (41)$$

Med $v_{tot} = v_i + v_r$ måste motsvarande kontinuitet även gälla hastighet precis till vänster och till höger om randen

$$\frac{\hat{p}_i}{\rho_1 c_1} - \frac{\hat{p}_r}{\rho_1 c_1} = \frac{\hat{p}_t}{\rho_2 c_2} \quad (42)$$

Från de båda ekvationerna kan \hat{p}_t elimineras och sambandet \hat{p}_r / \hat{p}_i lösas ut. Förhållandet mellan reflekterad och infallande våg kallas reflektionsfaktor och betecknas r . Vi får att

$$r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (43)$$

Reflektionsfaktorn r är positiv om $\rho_2 c_2$ är större än $\rho_1 c_1$ och negativ om $\rho_2 c_2$ är mindre än $\rho_1 c_1$ (t ex luft till vatten eller, resp. vatten till luft). Om $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$ blir $r = 0$ som väntat.

Vi kan definiera en transmissionsfaktor t genom att teckna ett liknande förhållande mellan transmitterad och infallande våg

$$t = \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (44)$$

Transmissionskoefficienten τ definieras som förhållandet mellan transmitterad och infallande ljudintensitet, d v s

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} \quad (45)$$

Sambandet mellan ljudintensitet (tidsmedelvärde) och ljudtryck (effektivvärde) är $I = \tilde{p}^2 / \rho c$. Om ingen energi förloras i gränsskiktet gäller att

$$I_i = I_r + I_t \quad (46)$$

Med ovanstående samband får vi att

$$\tau = 1 - \frac{I_r}{I_i} = 1 - \frac{p_r^2}{p_i^2} \quad (47)$$

d v s sambandet mellan transmissionskoefficient τ och reflektionsfaktorn r är

$$\tau = 1 - r^2 \quad (48)$$

Vi kan istället införa en reflektionskoefficient $\rho = r^2$ som anger hur stor andel av infallande intensitet som reflekteras¹, så att

$$\tau + \rho = 1 \quad (49)$$

Alltså, andel transmitterad intensitet + andel reflekterad intensitet = 1.

Vi kan uttrycka koefficienterna ovan med hjälp av impedanserna för de båda medierna enligt

$$\rho = r^2 = \frac{|\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1|^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{|Z_2 - Z_1|^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (50)$$

$$\tau = \frac{4\rho_2 c_2 \cdot \rho_1 c_1}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (51)$$

¹ Ej att förväxlas med densiteten.

Viktiga samband

Vid normalt infall mot en hård randyta blir tryckfunktionen

$$p(x,t) = 2\hat{p}_+ \cos(kx) \cdot e^{i\omega t}$$

och hastighetsfunktionen

$$v(x,t) = 2\hat{v}_+ \sin(kx) \cdot e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

Helmholtz ekvation

$$\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + k^2 p(x) = 0$$

har i det endimensionella fallet med två hårda randytor vid $x = 0$ och $x = L$ lösningen

$$p(x,t) = B \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot e^{i2\pi f_n t}$$

där f_n är resonansfrekvenserna

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{2L} n$$

I det tredimensionella fallet med sex hårda randytor blir egenfrekvenserna

$$f_{n_x, n_y, n_z} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{H}\right)^2}$$

Vid övergång från ett medium med vågimpedansen $Z_1 = \rho_1 c_1$ till ett medium med vågimpedansen $Z_2 = \rho_2 c_2$ blir transmissionsfaktorn t och reflektionsfaktorn r

$$t = \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i} = \frac{2\rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

medan transmissionskoefficienten τ och reflektionskoefficienten ρ blir

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4\rho_2 c_2 \cdot \rho_1 c_1}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{4Z_2 Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad \rho = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1|^2}{(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1)^2} = \frac{|Z_2 - Z_1|^2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Uppgifter

1. En ljudvåg med våglängden λ och ljudnivån $L_p = 50$ dB infaller mot en hård vägg där vi får fullständig reflektion. Väggen ligger vid $x = 0$. Beräkna ljudnivån vid:

- a) $x = 0$, b) $x = \lambda/2$, c) $x = \lambda/4$, d) $x = \lambda$, e) $x = \lambda/6$

2. Maximal ljudabsorption och energiförlust uppnår man i de punkter där luften rör sig som mest, alltså där partikelhastigheten är maximal. Anta att vi sätter en tunn absorbent 0.25 m ut från en vägg. För vilka frekvenser kan vi förvänta oss hög ljudabsorption om vi antar normalt infall mot väggen?

3. Ett kaklat badrum har golvarean 1.65×2.8 m². Beräkna de 5 lägsta egenfrekvenserna i rummet och ange respektive egenmod. Anta att taket är absorberande och beakta endast horisontella svängningar.

4. En ljudvåg infaller normalt från ett medium 1 till ett annat medium 2. Hur stor del av ljudtrycket kommer att transmittas respektive reflekteras om

- a) $Z_1 \ll Z_2$
b) $Z_1 = Z_2$
c) $Z_1 = 0.5 \cdot Z_2$

5. En ljudvåg infaller normalt från luft ($Z_{luft} = 415$ Pa·s/m) mot en vattenyta ($Z_{vatten} = 1.48 \cdot 10^6$ Pa·s/m).

- a) Hur stor andel av ljudintensiteten transmittas? Med hur många decibel minskar ljudintensiteten?
b) Vilken ljudnivå reflekteras vid ytan tillbaka upp i luften?

6. En ljudvåg infaller normalt från luft mot en mycket tjock betongvägg ($\rho = 2300$ kg/m³, $E = 26$ GPa). Ljudvågen fortsätter igenom betongen och vidare ut genom den andra ytan mot luft. Beräkna

- a) transmissionskoefficienten τ som definieras som ljudintensitet som tar sig igenom väggen och ut på andra sidan delat med intensitet som infaller mot väggen. Försumma reflexer inne i väggen.
b) reflektionskoefficienten ρ som är reflekterad intensitet delat med infallande intensitet.

Svar

1. a) $L_p = 56 \text{ dB}$

b) $L_p = 56 \text{ dB}$

c) $L_p = -\infty$

d) $L_p = 56 \text{ dB}$

e) $L_p = 50 \text{ dB}$

2. $f = 340 + 680 \cdot n \text{ Hz}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ dvs 340 Hz, 1020 Hz, 1700 Hz, 2380 Hz osv.

3. $f_{1,0} = 60.7 \text{ Hz}$

$f_{0,1} = 103 \text{ Hz}$

$f_{1,1} = 120 \text{ Hz}$

$f_{2,0} = 121 \text{ Hz}$

$f_{2,1} = 159 \text{ Hz}$

4. a) $t \approx 2$ $r \approx 1$

b) $t = 1$ $r = 0$

c) $t = 1.33$ $r = 0.33$

5. a) $\tau = 1.1 \cdot 10^{-3}$ $\Delta L = -30 \text{ dB}$

b) $\rho \approx 1$, dvs i stort sett samma som infaller, $L_{ref} \approx L_{in}$

6. a) $\tau_{tot} = \tau_1 \cdot \tau_2 = 4.6 \cdot 10^{-8}$

b) $\rho \approx 1$