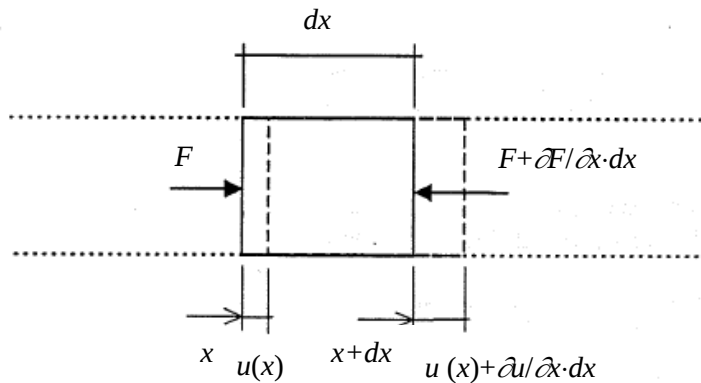


Våg1 – Endimensionell vågutbredning

Här kommer vågekvationen för framför allt longitudinalvågor att tas fram. När vi har fått fram vågekvationen och en lösningsmetodik kommer vi att behandla endimensionella longitudinalvågor i luft. Här behandlas även skjuvvåg och böjvåg i fasta material.

Härledning av vågekvationen, longitudinalvåg i en stång

Vi tänker oss att vi skär ut en liten del av en stång, frilägger denna och ställer upp Newtons rörelseekvation. Stångbiten har längden dx . Vidare har vi en utbredd massa per längdenhet $\mu = \rho S$, där ρ är densiteten och S är tvärsnittsarean. På den ena snittytan vid koordinaten x verkar en kraft $F(x)$ och på den andra snittytan vid $x+dx$ verkar samma kraft plus en viss förändring av denna, $F(x+dx)$, vilket kan Taylorutvecklas och approximeras med $F(x+dx) \approx F + \partial F / \partial x \cdot dx$. Förskjutningen av den vänstra snittytan betecknas $u(x)$ medan förskjutningen av den högra snittytan då blir $u(x+dx)$, som på samma sätt approximeras med $u(x+dx) \approx u(x) + \partial u / \partial x \cdot dx$.



Figur 1 Friläggning av stångelement

Vi ställer nu upp rörelseekvationen som säger att summan av krafterna ska vara lika med massan gånger tyngdpunktens acceleration

$$(\rightarrow) \quad F - \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = ma \quad (1)$$

Om dx är mycket litet kan vi vidare approximera förskjutningen av massans tyngdpunkt med $u(x+dx/2) \approx u(x)$. Alltså har vi

$$m = \mu dx \quad (2)$$

och

$$a = \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

Rörelseekvationen kan nu förenklas till

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = -\mu \cdot dx \cdot \ddot{u} \quad (4)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

För att komma vidare behöver vi nu ytterligare en ekvation som relaterar krafterna med förskjutningarna. Från Byggnadsmekaniken känner vi till Hookes lag, som säger att spänningarna σ är proportionella med töjningarna ε :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (6)$$

där E är elasticitetsmodulen och tvärkontraktionen försummas. Vidare är spänning detsamma som kraft per ytenhet och töjning detsamma som förskjutning per längdenhet. Vi måste dock beakta att positiv spänning är dragen, medan vi har satt kraften tryckt, så vi får ha negativt tecken på kraften:

$$\sigma = -\frac{F}{S} \quad (7)$$

Töjning förhåller sig till förskjutningen som

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

Den sökta relationen mellan krafterna och förskjutningarna är således

$$F = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad (9)$$

Om vi deriverar ekvation (9) en gång med avseende på x och stoppar in i ekvation (5), så har vi slutligen vågekvationen för en longitudinalvåg i en stång:

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Vågekvationen är tydligen en andra ordningens partiell differentialekvation. För att lösa den behövs två begynnelsevillkor och två randvillkor. De flesta vågekvationer, så som transversalvågen i en gitarrsträng, en torsionsvåg i en svarv eller elektriska vågor, har denna form. Böjvågen i en balk har dock ett annat utseende, den är av fjärde ordningen.

Ofta använder man sig av förskjutningshastigheten $v = \partial u / \partial t$ i stället för förskjutningen u . I sådana fall blir vågekvationen istället

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

eftersom derivatan $\partial/\partial t$ verkar lika på alla termer. Ekvation (5) och (9) blir i detta fall

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -ES \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (14)$$

vilket ser lite snyggare ut, då relationerna är symmetriska (kom ihåg att $\mu = \rho S$). Dessa ekvationer brukar kallas fältekvationerna. Deriverar vi nu ekvation (13) med avseende på x och ekvation (14) med avseende på t , så har vi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -ES \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (16)$$

och om vi stoppar in den ena i den andra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\mu}{ES} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (17)$$

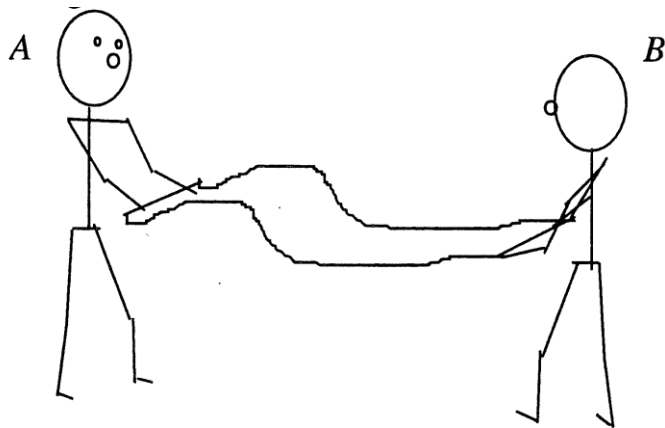
$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

så får vi vågekvationen igen, men denna gång med kraften F som variabel. Det är tydligen likgiltigt vilken variabel man använde, och man använder lämpligen den som lämpar sig bäst för problemet i fråga. För vågor i fasta material är det vanligast att använda förskjutning som variabel. De olika variablerna brukar benämnas fältvariablerna.

Vågutbredning

Men vad är då en våg?



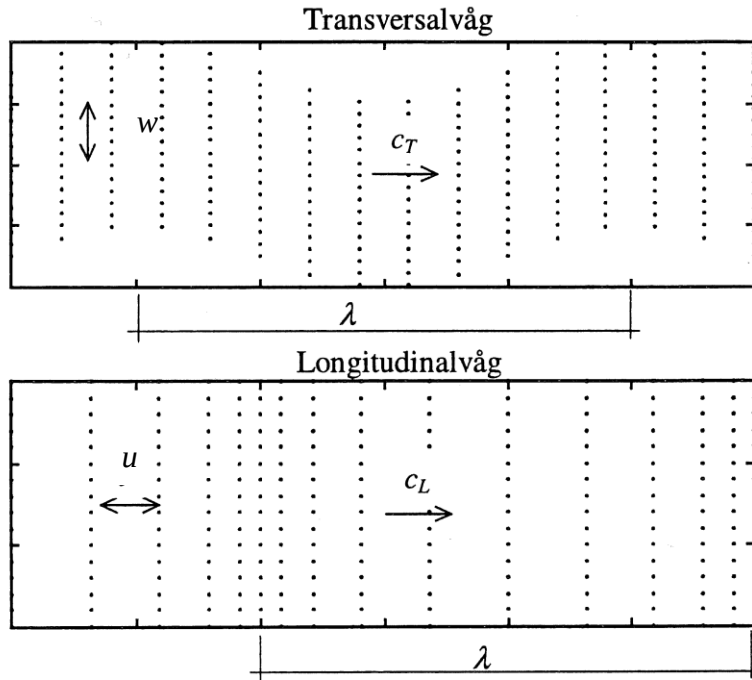
Figur 2 Vågutbredning i en matta.

Vi kan tänka oss två personer som skakar en matta, vi kallar dem A och B. Vi tänker oss vidare att B håller sin kant stilla medan A gör en plötslig rörelse uppåt vid sin kant. Resten av mattan vill nu följa med i denna rörelse, med början med de punkter på mattan som är närmast A. Rörelsen fortsätter sedan att sprida sig med en konstant hastighet tills den når B. Om A fortsätter att skaka sin ände upp och ned, och provar olika takt i skakandet, olika frekvens, så kommer de finna att om man skakar snabbt så blir ”pulsen”, eller våglängden, kort och om man skakar långsamt så blir våglängden lång. Men oavsett vilken frekvens de skakar med så kommer spridningshastigheten att vara densamma. Med andra ord, händelsen att ”röra sig uppåt” sprider sig längs mattan med en viss hastighet som vi kan kalla c , vågutbredningshastighet. Det känns naturligt att c beror på mattans vikt och hur hårt A och B drar i mattan, hur stor spänningen är. Är massan stor, tung matta, transporteras vågen långsamt. Är spänningen stor går vågen snabbt. Den initiella förskjutningen kommer att repeteras vid en punkt belägen en sträcka x från A, och detta sker efter x/c sekunder, det vill säga den tid det tar för vågen att utbreda sig sträckan x .

Det är viktigt att inse att ingen massa transporteras av vågen, vad som transporteras är endast möjligheten till rörelse. Massan i mattan rör sig endast upp och sedan ner igen.

I exemplet med mattan ovan var förskjutningen uppåt medan vågutbredningen går mellan A och B, vilket är en transversalvåg.

I exemplet med stången var vågutbredningen och förskjutningen riktad åt samma håll, en longitudinalvåg. Nedan visas exempel på hur harmoniska transversal- och longitudinalvågor kan se ut. I den övre figuren är våglängden λ , partikelförskjutningen w i y -led samt våghastigheten c_T markerad. I den undre figuren är våglängden λ , partikelförskjutningen u i x -led samt våghastigheten c_L markerad.



Figur 3 Exempel på transversalvåg och longitudinalvåg.

Hur ska man då beskriva vågutbredningen? Vi återgår till exemplet med longitudinalvågen i en stång. Vi beskrev här förskjutningarna i en punkt med u , där u både är en funktion av rummet och tiden.

$$u = u(x, t) \quad (19)$$

Om vi nu tittar i en specifik punkt på stången, säg $x = 0$, där vi driver stången med en bestämd förskjutning u_{driv} så har vi där endast en variabel

$$u(0, t) = u_{driv}(t) \quad (20)$$

Vi har tidigare sagt att vad som karakteriserar en våg är att rörelsen fortsätter att sprida sig med en konstant hastighet, som vi kallar c . Vid en annan position $x = x_1$ på stången kommer därför samma tidshistoria att inträffa som för drivpositionen, men försenat på grund av gångtiden x_1/c . Vågformen förändras alltså inte

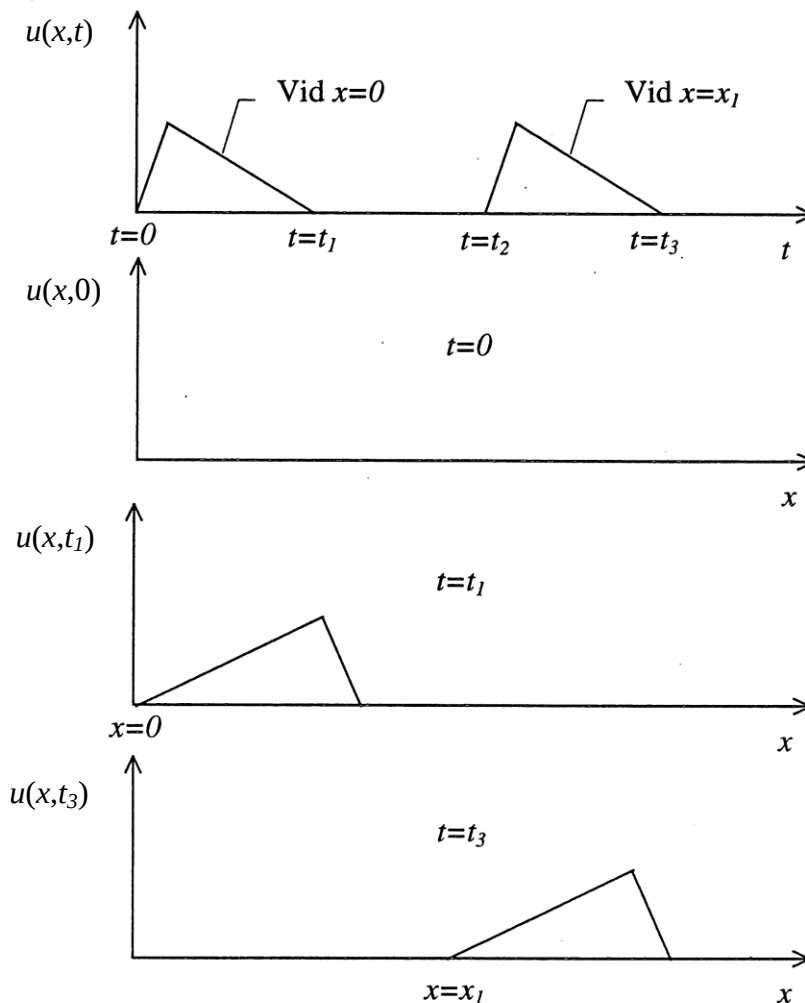
$$u(x_1, t) = u_{driv}(t - x_1 / c) \quad (21)$$

Helt allmänt, för en godtycklig position, har då förskjutningen reducerats till en funktion av en variabel $t - x/c$. Vi har dock missat att vågen i allmänhet kan gå både framåt, i positiv x -riktning, som bakåt, i negativ x -riktning. Alltså behöver vi lägga till en bakåtgående våg, vilken kan beskrivas med en variabel $t + x/c$

$$u(x, t) = u_+(t - x_1 / c) + u_-(t + x_1 / c) \quad (22)$$

Ovanstående funktion kallas d'Alemberts lösning och är lösningen till vågekvationen på den mest generella formen.

Vi har sagt att vågformen inte ändras beroende på var och när vi betraktar den, och att alla delar av vågen rör sig med samma hastighet. För en given tidshistoria vid $x = 0$, så kan man få vågformen, det vill säga motsvarande x -beroende vid en given tidpunkt (jämför med fotografi), genom att överföra varje förskjutning vid $x = 0$, till x -skalan med hjälp av hastigheten c , se figuren nedan. Funktionerna för förskjutningens t -beroende och förskjutningens x -beroende kommer då att bli spegelbilder av varandra. Matematiskt kan man se detta som en konsekvens av att t - och x -termerna i argumentet $t - x/c$ har olika tecken.



Figur 4 Tids- och rumsberoende för våg.

Vi har nu först härlett vågekvationen och sedan resonerat oss fram till hur lösningen till denna bör se ut. Genom att sätta in den antagna lösningen i ekvationen, så kan vi se om den stämmer. För enkelhets skull antar vi att vi endast har en framåtgående våg, för bakåtgående våg gäller samma sak. Anta

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= u_+(t - x/c) \Rightarrow \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{c} u'_+(t - x/c) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} u''_+(t - x/c) \\
 \frac{\partial u}{\partial t} &= u'_+(t - x/c) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''_+(t - x/c)
 \end{aligned} \tag{23}$$

Här betyder ' derivata med avseende på hela argumentet, det vill säga $\partial u / \partial (t - x/c)$. Insatt i vågekvationen ger detta

$$\frac{1}{c^2} u''_+ - \frac{\rho}{E} u''_+ = 0 \tag{24}$$

och för att detta ska gälla så måste våghastigheten vara

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{25}$$

vilket verkar rimligt, då ett tyngre medium ger en långsammare våg, medan ett styvare medium ger en snabbare våg.

Harmoniska vågor

Vi har nu visat att funktioner av formen $u(t \pm x/c)$ löser vågekvationen och att våghastigheten c bestäms med hjälp av elasticiteten och densiteten. Ofta är det dock praktiskt att begränsa sig till harmoniska funktioner eftersom varje godtycklig funktion kan beskrivas med hjälp av harmoniska funktioner. Vi antar nu att drivningen är en harmonisk funktion

$$u(0, t) = u_{driv}(t) = \hat{u}_{driv} \cos(\omega t) \tag{26}$$

Om vi vill ha en lösning till vågekvationen på denna form behöver vi bara byta ut t mot $t \pm x/c$.

$$u(x, t) = \hat{u}_{driv} \cos(\omega(t \pm x/c)) \tag{27}$$

Genom att införa en ny term k , som vi kallar vågtal, kan skrivsättet förenklas

$$\begin{aligned}
 k &= \omega / c \Rightarrow \\
 u(x, t) &= \hat{u}_{driv} \cos(\omega t \pm kx)
 \end{aligned} \tag{28}$$

Vågtalet k har tydligen samma betydelse för rumsberoende som ω har för tidsberoendet. Vi skriver upp de båda frekvenstermerna jämte varandra

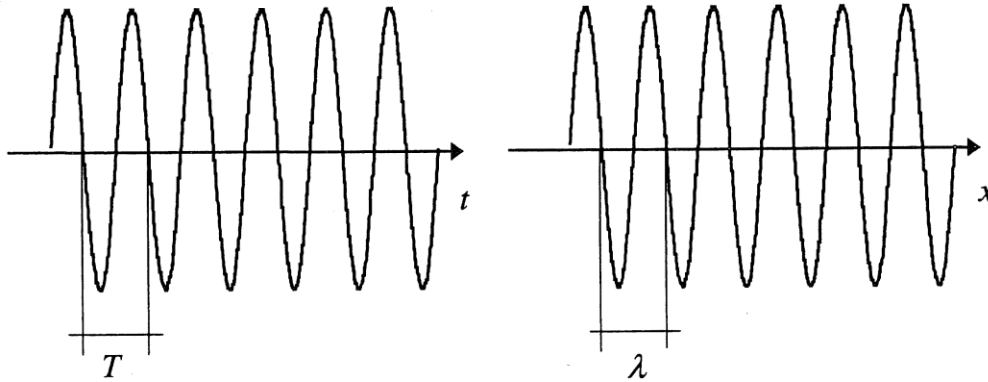
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{29}$$

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (30)$$

Det leder till ett enkelt samband mellan våglängd och frekvens

$$c = f\lambda \quad (31)$$

Här är T periodtid och λ våglängd.



Figur 5. Periodtid T och våglängd λ .

Andra vågtyper i fasta material

I exemplet med stängen ovan har vi bortsett från tvärkontraktionen. Om materialet i stängen är isotropt med tvärkontraktionstalet ν får vi korrigera vågekvationen till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

och våghastigheten blir då istället

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu^2)}{\rho}} \quad (33)$$

Skjuvvågor

På samma sätt som med longitudinalvågen ovan kan man ställa upp motsvarande vågekvation för skjuvvågor. Som innan använder man rörelselagen, fast nu i vertikalled, och skjuvspänning istället för normalspänning. Vågekvationen blir då

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (34)$$

där w är förskjutningen i tvärriktningen¹ och G materialets skjuvmodul. Den har samma lösning som ovan,

$$w = w(x, t) = \hat{w} \cos(\omega(t \pm x/c)) \quad (35)$$

med våghastigheten

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (36)$$

För isotropa material är våghastigheten för transversella skjuvvågor lägre än för longitudinella tryckvågor eftersom

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (37)$$

Böjvågor

Vågekvationen för böjvågor i balkar såväl som plattor härleds med hjälp av elastiska linjens ekvation. Den skiljer sig från de ovanstående genom att den består av fjärde rumsderivatan av förskjutningen istället för andraderivatan som ovan

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (38)$$

Där B är balkens böjstyvhet, för rektangulärt tvärsnitt

$$B = EI = E \frac{bh^3}{12} \quad (39)$$

och S är balkens tvärsnittsarea. I en lång balk är vågekvationens (harmoniska) lösning

$$w = w(x, t) = \hat{w} \cos(\omega t \pm kx) \quad (40)$$

vilket är samma som för longitudinella vågor. När man sätter in lösningen i vågekvationen kan man lösa ut våghastigheten² c_f som

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{\rho S}} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{Eh^2}{12\rho}} \quad (41)$$

Vad man kan observera här är det viktiga resultatet att våghastigheten är beroende av frekvensen, ju högre frekvens desto snabbare går vågen. Våghastighetens

¹ Ofta använder man sig av v för att beskriva transversell förskjutning, men här sparas den till hastighet i longitudinell riktning.

² När det gäller våghastighet för böjvågor måste man skilja mellan fashastighet c_f och gruppshastighet c_g . Den förra anger hur snabbt information i vågen (fasen) fortplantar sig, medan den senare hur energin fortplantar sig. De förhåller sig så att $c_g = 2c_f$

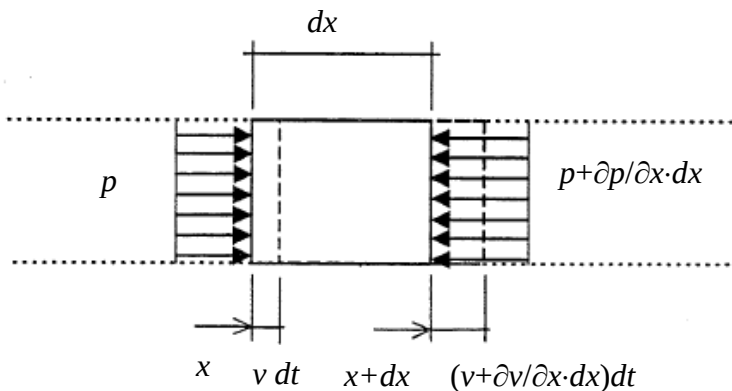
frekvensberoende kallas dispersion och sambandet ovan kallas dispersionsrelation. För de tidigare nämnda vågtyperna är ju våghastigheten samma oavsett frekvens.

Vidare kan man observera att om frekvensen går mot oändligheten, vilket är fysikaliskt möjligt, så går hastigheten också mot oändligheten, vilket inte är fysikaliskt möjligt då information inte kan färdas snabbare än ljuset. Dessförinnan sätter dock teorin begränsningar i att antagandena hos balkteorin som ligger till grund för elastiska linjens ekvation inte längre gäller. Våglängden, som ska vara betydligt längre än balkens tjocklek, minskar med högre frekvens.

Endimensionell vågutbredning i fluider

De fenomen man framför allt behandlar i akustiken är vågutbredning i fluider, nämligen ljudvågor i luft. Med fluider menar man medier som inte tar upp skjuvspänningar, det vill säga gaser och vätskor. Således gäller de ekvationer som vi kommer att ta fram här både för ljudutbredning i luft och i vatten. För att hitta vågekvationen skär vi ut en infinitesimal strimla av fluiden, frilägger denna, ställer upp rörelseekvationen och ser vad som händer. Fluidelementet har längden dx . Vidare har vi en massa per volymenhet, det vill säga densitet ρ . På den ena snittytan verkar ett tryck $p(x) = F/S$ och på den andra verkar samma tryck plus en viss förändring av denna, $p(x + dx) \approx p(x) + \partial p / \partial x \cdot dx$.

Förskjutningen av den vänstra snittytan betecknas med vibrationshastigheten v gånger ett litet tidstillskott dt , så $u = v dt$, medan förskjutningen av den högra snittytan betecknas $(v + \partial v / \partial x \cdot dx) dt$. Det bör här påpekas att med vibrationshastighet så menar vi den del av fluidens hastighet som fluktuerar, vi tar alltså inte med det konstanta flödet från exempelvis vind, fläktar eller strömmande vatten.



Figur 6. Fluidelement med tjockleken dx .

Vi ställer upp rörelseekvationen för fluidelementet

$$(\rightarrow) \quad F - \left(F + \frac{\partial F}{\partial x} dx \right) = ma \quad (42)$$

Vi använder tryck istället för kraft, så:

$$pS - \left(pS + \frac{\partial p}{\partial x} dx S \right) = ma \quad (43)$$

Om dx är mycket litet så kan vi anta att massans förskjutning kan beskrivas enbart med u eller $v dt$:

$$m = \rho S \cdot dx \quad (44)$$

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (45)$$

Rörelseekvationen kan nu förenklas till

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (46)$$

För att komma vidare behöver vi nu ytterligare en ekvation som kan relatera krafterna med förskjutningarna. I fallet med en stång använde vi Hooke's lag. När det gäller fluider, eller åtminstone om vi begränsar oss till gaser, så får vi använda den allmänna tillståndslagen för gaser. I fallet med vätskor kan man hitta motsvarande samband, som vi dock inte tar upp här. Vi börjar dock med att beskriva förändringen i vibrationshastigheten i relation till töjningen:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (47)$$

I Hooke's lag har spänningen s och töjningen ε samma tecken. Detta beror på att dragning är positiv spänning medan tryck är negativ. Motsvarigheten till Hooke's lag i luft måste därför ha negativt tecken. Vi kan då skriva:

$$p = -D\varepsilon \quad (48)$$

där D är bulkmodulen (eller volymstyvheten). Vad vi nu behöver är ett uttryck för denna. Från fysikkursens avsnitt om gasfysik känner vi till att allmänna gaslagen vid adiabatisk³ kompression kan skrivas som

$$PV^\gamma = \text{konstant} \quad (49)$$

där P är tryck, V är volym och γ är kvoten mellan värmekapaciteterna $\gamma = C_p/C_v$. För tvåatomiga gaser, som luft, är $\gamma = 1.4$. Vi använder här stor bokstav för trycket P . Detta beror på att det här handlar om det totala trycket, som är uppbyggt av ett konstant atmosfärstryck P_0 samt ett vibrationstillskott $p(t)$ som vi är intresserade av, $P = P_0 + p(t)$.

Vi logaritmerar och deriverar nu gaslagen för att få ett användbart uttryck.

³ En adiabatisk tillståndsförändring betyder, som ni vet från fysikkursen, att processen sker utan värmetransport eller värmeförluster, det vill säga förlustfritt i vårt fall. Då man vill ta hänsyn till förluster, som i absorber, tänker man sig istället isoterma tillståndsförändringar, $PV = \text{konstant}$.

$$\ln(PV^\gamma) = \ln(\text{konstant}) \Rightarrow \ln(P) + \gamma \ln(V) = \ln(\text{konstant})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\ln(P) + \gamma \ln(V)) = \frac{\partial}{\partial t} (\ln(\text{konstant})) \Rightarrow \frac{\partial P / \partial t}{P} + \gamma \frac{\partial V / \partial t}{V} = 0 \quad (50)$$

Tidsdifferentialen dt finns i alla led och kan därför förkortas bort. Vidare kan vi approximera de båda andra differentialerna dP och dV med differenser

$$\frac{\partial P / \partial t}{P} + \gamma \frac{\partial V / \partial t}{V} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} + \gamma \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad (51)$$

Man kan nu se att $\Delta P = P(t) - P(0) = p(t)$ och att $\varepsilon = \Delta V/V$. Således har vi

$$\frac{p(t)}{P} + \gamma \varepsilon(t) = 0 \quad (52)$$

Som en sista approximation antar vi att man för små tryckförändringar kan ersätta det totala trycket P i nämnaren med det konstanta atmosfärstrycket P_0

$$\frac{p(t)}{P_0} + \gamma \varepsilon(t) = 0 \quad (53)$$

Vi flyttar om så att vi kan identifiera bulkmodulen

$$p(t) = -\gamma P_0 \varepsilon(t) \Rightarrow$$

$$D = \gamma P_0 \quad (54)$$

Om vi kombinerar ekvation (47) med tidsderivatan av ekvation (54) så får vi den andra fältekvationen

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} = -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (55)$$

Om vi stoppar in ekvation (55) i (46), så har vi slutligen vågekvationen för en longitudinalvåg i luft (i en vätskevåg får vi använda en annan bulkmodul D):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\gamma P_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (56)$$

Som innan kan vi skriva vågekvationen för den fältvariabel som vi vill använda i varje specifikt fall. Dessa skriver vi dock inte ut denna gång. Ur ekvation (56) kan vi vidare identifiera våghastigheten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \quad (57)$$

För luft kan vi nu lätt beräkna våghastigheten. Luftens densitet är $\rho = 1.18 \text{ kg/m}^3$ vid 22°C och normalt atmosfärstryck som är $P_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Konstanten γ som relaterar värmekapaciteterna för konstant tryck och konstant volym, är $\gamma = 1.4$ för tvåatomiga gaser som luft. Således är ljudutbredningshastigheten för luft:

$$c = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 1.013 \cdot 10^5}{1.18}} = 347 \text{ m/s} \quad (58)$$

Luftens densitet är dock beroende av temperaturen, så om man vill vara noggrann får man modifiera formeln för ljudhastigheten:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho(T=0^\circ)}} \left(1 + \frac{T}{2 \cdot 273}\right) = 331.4 \cdot \left(1 + \frac{T}{2 \cdot 273}\right) \quad (59)$$

där T denna gång är temperaturen i grader Celsius. Vanligvis räknar man dock med $c = 340 \text{ m/s}$, vilket motsvarar $18\text{-}19^\circ\text{C}$. Om vi har en allmän fluid får vi istället använda bulkmodulen

$$c = \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad (60)$$

För sötvatten vid 20°C är bulkmodulen $D = 2.18 \cdot 10^9 \text{ Pa}$. Som tidigare kan man använda andra fältvariabler än trycket i vågekvationen, till exempel partikelhastigheten⁴ v . Vanligen beskriver man ljudet med trycket $p(x,t)$, men partikelhastigheten används också vilket vi snart ska se.

Harmonisk lösning till vågekvationen i luft

En harmonisk lösning till vågekvationen i luft uttryckt i tryck är

$$p(x,t) = \hat{p}_+ \cos(\omega t - kx) \quad (61)$$

för en våg som fortskrider i positiv x -riktning, eller uttryckt i komplex form

$$p(x,t) = \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} \quad (62)$$

Om man vill ta reda på vad partikelhastigheten är kan man använda rörelseekvationen

⁴ Var observant på att partikelhastigheten $v(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$ skiljer sig från våghastigheten c . Den förra är hastigheten i varje ögonblick för fluidelementet eller partikeln som befinner sig vid x och den senare är hastigheten med vilken vågrörelsen utbreder sig.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow v = -\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \int -ik \cdot p_+ e^{i(\omega t - kx)} dt = \\ &= \frac{ik}{\rho} \frac{1}{i\omega} p_+ e^{i(\omega t - kx)} = \frac{1}{\rho c} p_+ e^{i(\omega t - kx)}\end{aligned}\quad (63)$$

Detta är ett viktigt resultat och konstanterna framför uttrycket brukar få en egen beteckning. Vi definierar därför den specifika akustiska impedansen Z , eller vågimpedansen, som kvoten mellan det komplexa trycket och den komplexa hastigheten i den framtidskridande vågen:

$$Z \equiv \frac{p}{v} \quad (64)$$

Impedansen är i allmänhet en komplex storhet och innehåller alltså både amplitud och fas. För en endimensionell våg som färdas i positiv x -riktning blir $Z = Z_+$ en reell storhet

$$Z_+ = \frac{p_+}{v_+} = \rho c \quad (65)$$

För en våg som fortskrider i negativ x -riktning kan man visa att impedansen blir

$$Z_- = \frac{p_-}{v_-} = -\rho c \quad (66)$$

Impedans kan beskrivas som ett motstånd till rörelse, en hög impedans i mediet innebär att det krävs ett högt tryck för att åstadkomma en viss partikelhastighet. Mekanikens motsvarighet till impedansen är styvhet, alltså kraft genom förskjutning eller motstånd mot deformation. Vi kan också se det som en överföringsfunktion som diskuterades i avsnittet om SDOF.

Vid ljudövergångar mellan olika medier är det förhållandet mellan mediernas impedanser som avgör hur mycket av ljudenergin som transmitteras in i det nya mediet och hur mycket som reflekteras. Vid 20°C och normalt lufttryck (och inget annat anges) brukar man räkna med impedansen för luft $Z_{\text{luft}} = 415 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}$ och för sötvatten $Z_{\text{sötvatten}} = 1.48 \cdot 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{s}/\text{m}$.

För fasta material brukar man istället använda sig av mekanisk vågimpedans, som definieras

$$Z = \frac{F}{v} \quad (67)$$

Ljudtrycksnivå

Vid praktiska ändamål är det osmidigt att använda tryckamplituden $\hat{p}$ som mått på ljudstyrkan. Det är vanligt inom signalområdet använda effektivvärdet för tryckfunktionen istället,

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt} \quad (68)$$

Där $\tilde{p}$ kallas effektivvärde eller rms-värde (root-mean-square – roten ur tidsmedelvärde av trycket i kvadrat). För en periodisk signal, vilket vi kan utgå ifrån i akustiska sammanhang, så gäller att $\tilde{p} = \hat{p}/\sqrt{2}$. Inte heller detta är så praktiskt smidigt eftersom ljudtrycket har så stor spännvidd. Därför införde man tidigt måttet ljudtrycksnivå som definieras som

$$L_p = 10 \log \left(\frac{\tilde{p}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{\tilde{p}}{p_{ref}} \right) \quad \text{där } p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad (69)$$

L står för ljudnivå och index p indikerar att det är ljudtrycksnivå, till skillnad från andra som visas senare. I regel säger man lite kortare ljudnivå och då är det underförstått att det är ljudtrycksnivå som avses då denna är vanligast använd. Enheten för ljudnivå är decibel, dB.

Ljudintensitet och Ljudeffekt

Ljudintensiteten definieras som ljudenergi per tidsenhet som passerar genom en areaenhet vinkelrät mot utbredningsriktningen. Från grundkursen i mekanik får vi uttrycket för effekt i varje ögonblick som

$$\Pi(t) = F(t) \cdot v(t) \quad (70)$$

där $\Pi(t)$ är ljudeffekten i W, $F(t)$ är kraften som verkar på areaenheten och $v(t)$ är partikelhastigheten. Ljudintensitet är alltså effekt per areaenhet

$$I(t) = \frac{d\Pi}{dS} \Rightarrow I(t) = \frac{\Pi(t)}{S} \quad (71)$$

om energin är jämnt fördelad över ytan S . Vi kan skriva den momentana ljudintensiteten som

$$I(t) = p(t) \cdot v(t) \quad (72)$$

Precis som med tryck och hastighet är det mer användbart med tidsmedelvärdet av ljudintensiteten

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad (73)$$

Tidsmedelvärdet av effekten (om energin är jämnt fördelad över S) är

$$\bar{\Pi} = \frac{S}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad (74)$$

Om vi begränsar oss till en endimensionell vågrörelse som färdas i positiv x -riktning så kan vi skriva trycket och partikelhastigheten på komplex form enligt

$$p(x, t) = \hat{p} e^{i(\omega t - kx)} \quad (75)$$

och

$$v(x, t) = \hat{v} e^{i(\omega t - kx)} = \frac{\hat{p}}{\rho c} e^{i(\omega t - kx)} \quad (76)$$

Då blir tidsmedelvärdet av intensiteten i en aktuell punkt

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt = \frac{1}{\rho c} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T p(t)^2 dt = \frac{1}{\rho c} \cdot \tilde{p}^2 \quad (77)$$

där $\tilde{p}$ är tryckets effektivvärde. Precis som man kan definiera ljudtrycksnivå definierar man också ljudintensitetsnivå enligt

$$L_I = 10 \log \left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}} \right) \quad \text{där } I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad (78)$$

Där $\bar{I}$ är absolutbeloppet av ljudintensitetsnivåns tidsmedelvärde. I_{ref} är referensstorheten för ljudintensitet. Det går även att på motsvarande sätt definiera ljudeffektsnivå som

$$L_{\Pi} = 10 \log \left(\frac{\bar{\Pi}}{\Pi_{ref}} \right) \quad \text{där } \Pi_{ref} = 10^{-12} \text{ W} \quad (79)$$

Viktiga formler

Rörelseekvationen i fluider och fasta medier är

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t}$$

Vidare gäller för fluider sambandet mellan tryck och partikelhastighet

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma P_0 \frac{\partial v}{\partial x}$$

För fasta medier har vi motsvarande samband mellan kraft och förskjutning

$$F = -ES \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vågekvationen för longitudinella vågor i en dimension uttryckt i ljudtryck är

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

där $c = \sqrt{\gamma P_0 / \rho}$ är utbredningshastigheten för tryckvågen i luft, $\gamma = 1.4$ och P_0 är atmosfärstryck. I fasta medier är utbredningshastigheten för longitudinella vågor $c = \sqrt{E / \rho}$. Även partikelförskjutning, partikelhastighet, töjning eller kraft kan användas istället för tryck som fältvariabel i vågekvationen.

Den allmänna lösningen till vågekvationen är

$$p(x, t) = p_+(t - x/c) + p_-(t + x/c)$$

Den harmoniska lösningen på vågekvationen på komplex form (för fysikalisk tolkning, ta realdelen av resultatet) är

$$p(x, t) = \hat{p}_+ e^{i(\omega t - kx)} + \hat{p}_- e^{i(\omega t + kx)}$$

där $\hat{p}_+$ och $\hat{p}_-$ är tryckamplituderna för vågorna som utbreder sig i positiv respektive negativ riktning. ω är vinkelfrekvensen och $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ är vågtalet. Det ger

$$c = f\lambda$$

Specifik akustisk impedans definieras som

$$Z \equiv \frac{p}{v}$$

För en framåtskridande våg i luft (endimensionell utbredning i positiv x-riktning) blir den specifika akustiska impedansen

$$Z = \frac{p_+}{v_+} = \rho c$$

För skjuvvågor kan man uttrycka vågekvationen med den transversella förskjutningen w

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{där } c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

För böjvågor i balkar och plattor blir vågekvationen i en dimension

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

där $B = E \frac{bh^3}{12}$ för rektangulärt tvärsnitt och utbredningshastigheten (fasens)

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{\rho S}}$$

Ljudenergi Π respektive ljudintensitet I är

$$\left. \begin{aligned} \Pi(t) &= F(t) \cdot v(t) \\ I(t) &= \frac{\Pi(t)}{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I(t) = p(t) \cdot v(t)$$

Utifrån ljudtrycket definieras ljudnivån som

$$L_p = 10 \log \left(\frac{\tilde{p}^2}{p_{ref}^2} \right) \quad \text{där } p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

Ljudeffektnivå och ljudintensitetsnivå beräknas utifrån respektive tidsmedelvärde enligt

$$L_{\Pi} = 10 \log \left(\frac{\bar{\Pi}}{\Pi_{ref}} \right) \quad \text{och} \quad L_I = 10 \log \left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}} \right)$$

där $\Pi_{ref} = 10^{-12} \text{ W}$ och $I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Tidsmedelvärdena är

$$\bar{\Pi} = \frac{S}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt \quad \text{och} \quad \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt$$

För en våg som fortplantar sig i positiv x -riktning gäller att $\bar{I} = \tilde{p}^2 / \rho c$.

Uppgifter

1. En ton med frekvensen $f = 500$ Hz utbreder sig i luft. Beräkna

- a) vinkelfrekvensen ω .
- b) periodtiden T .
- c) våglängden λ .
- d) vågtalet k .

2. Utgå från följande materialdata.

Ämne/material	Densitet ρ_0 [kg/m ³]	E-modul / Bulkmodul [Pa]
Luft (22°C)	1.18	$142 \cdot 10^3 (\gamma P_0)$
Sötvatten (20°C)	998	$2.18 \cdot 10^9$
Stål	7800	$200 \cdot 10^9$
Betong	2300	$26 \cdot 10^9$
Trä (i fiberriktningen)	500	$10 \cdot 10^9$

Tabell 1 Densitet och styvhet för olika ämnen/material.

Bestäm våghastighet och impedans ($Z = p/v$ för fluider, respektive $Z = F/v$ för fasta medier) för vågor i följande medium:

- a) Luft vid 20°C,
- b) Luft vid 0°C,
- c) Sötvatten vid 20°C.
- d) Stål, longitudinell våg i cirkulär stång med diametern 50 mm.
- e) Stål, kvasilongitudinell våg (tvärkontraktion försummas inte, $\nu = 0.3$) i samma stång.
- f) Stål, skjuvvåg i samma stång.
- g) Longitudinell våg i träpelare med tvärsnittsmått 125×125 mm.
- h) Betong (utan armering) med tvärsnittet 400×400 mm.

3. Visa att den komplexa tryckfunktionen

$$p(x,t) = \hat{p} e^{i(\omega t - kx)}$$

uppfyller den endimensionella vågekvationen i luft genom att sätta in i

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

(Ledning: sätt in tryckfunktionen i vågekvationen och derivera, använd att $c = \lambda f$.)

4. Vågshastigheten för en transversell våg i en sträng är 10 m/s. Vi tänker oss en icke-harmonisk våg. Den transversella förskjutningen vid positionen $x = 0$ är $u(0,t) = 0.1 \cdot (t^2 - t^3)$ m när tiden är mellan $0 < t < 1$ s, och för alla andra tidpunkter är $u(0,t) = 0$.

a) Rita förskjutningen som en funktion av tiden vid positionen $x = 0$.

b) Rita förskjutningen som en funktion av läget vid tiden $t = 1$ s. (ledning: använd d'Alemberts lösning för att uttrycka förskjutningen på formen $u(x,t)$)

c) Vad är det matematiska uttrycket för förskjutningen som en funktion av tiden vid läget $x = 10$ m? Vad är förskjutningen vid denna position vid tidpunkterna $t = 1$, $t = 1.5$ och $t = 3$ s?

d) Hur stor är den transversella hastigheten vid $x = 10$ m och $t = 1.5$ s?

e) Hur stor är strängens lutning θ vid $x = 10$ m och $t = 1.5$ s?

5. För en plan våg som färdas i positiv x -riktning är $Z_+ = \rho c$. Använd Newtons rörelselag och beräkna Z_- för en plan våg som färdas i negativ z -riktning.

6. Ljudintensitet och respektive tidsmedelvärde för en plan våg definieras som

$$I(x,t) = p(x,t) \cdot v(x,t) \quad \text{och} \quad \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot v(t) dt$$

och ljudintensitetsnivån som

$$L_I = 10 \log \left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}} \right) \quad \text{där } I_{ref} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Bestäm utifrån detta ett samband mellan ljudtrycksnivå L_p och ljudintensitetsnivå L_I . Anta en positiv våg och rumstemperatur. Vad händer om de båda förväxlas? $\rho c = 405 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$.

7. En kolv i vänstra änden av ett ihåligt rör (vid $x = 0$) svänger med en förskjutning som funktion av tiden $u(t) = \hat{u} \cos(\omega t)$, där $\hat{u} = 0.12$ mm och $\omega = 800$ rad/s. En ljudvåg sprids i röret, som har en tvärsnittsarea är $S = 0.01$ m² och kan antas oändligt långt.

- a) Bestäm $v(x, t)$ för den endimensionella vågen som fortplantas i röret uttryckt på komplex form. Hur stor är hastighetsamplituden?
- b) Bestäm $p(x, t)$, det vill säga den komplexa tryckfunktionen för vågen.
- c) Bestäm ljudnivån i röret.
- d) Bestäm tidsmedelvärdet av ljudintensiteten $\bar{I}$ för vågen.
- e) Bestäm ljudeffekten som sänds ut av kolven (in i röret).

8. En cirkulär stålstång med diametern 50 mm påverkas av en drivande kraft i ena änden där $x = 0$ så att $F(0, t) = F_{driv}(0, t) = F_{driv} e^{i\omega t}$, där $F_{driv} = 1$ kN och $\omega = 20$ rad/s. Kraften orsakar en forskridande våg i x -riktningen. Bestäm

- a) $\sigma(x, t)$
- b) $\varepsilon(x, t)$
- c) $u(x, t)$
- d) $v(x, t)$
- e) Bestäm $Z_{stål}$ utifrån resultatet i d).

Svar

1. a) $\omega = 3140 \text{ rad/s}$

b) $T = 2 \text{ ms}$

c) $\lambda = 0.68 \text{ m}$

d) $k = 9.24 \text{ rad/m}$

2. a) $c = 344 \text{ m/s}$ $Z = 405 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$

b) $c = 331 \text{ m/s}$ $Z = 428 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$

c) $c = 1480 \text{ m/s}$ $Z = 1.48 \cdot 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{s/m}$

d) $c = 5060 \text{ m/s}$ $Z = 77.6 \cdot 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}$

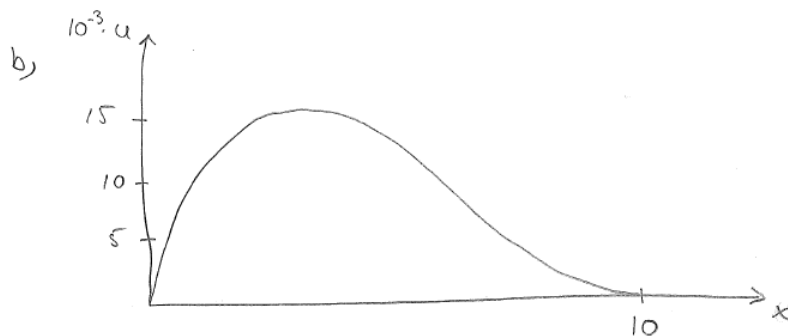
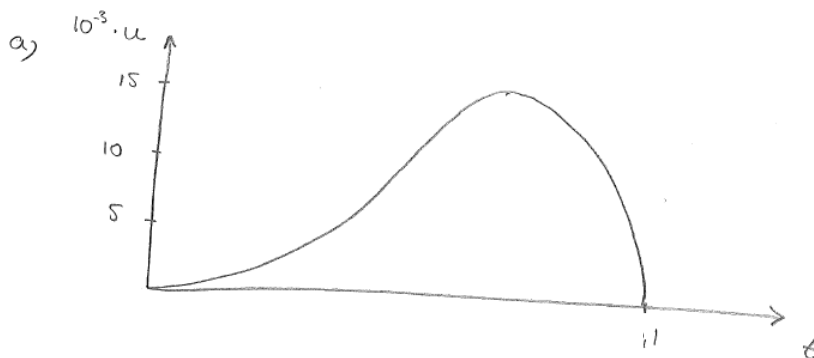
e) $c = 4830 \text{ m/s}$ $Z = 74.0 \cdot 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}$

f) $c = 3140 \text{ m/s}$ $Z = 48.1 \cdot 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}$

g) $c = 4470 \text{ m/s}$ $Z = 34.9 \cdot 10^3 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}$

h) $c = 3360 \text{ m/s}$ $Z = 1.24 \cdot 10^6 \text{ Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}$

4.



c)

$$u(10,t) = \begin{cases} 0.1 \cdot ((t-1)^2 - (t-1)^3), & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$u(10,1) = 0 \quad [\text{m}]$$

$$u(10,1.5) = 0.0125$$

$$u(10,3) = 0$$

d) $v(10,1.5) = 0.025 \text{ m/s}$

e) $\theta(10,1.5) = -0.0025 \text{ rad}$

6. $L_I = L_p - 0.16 \text{ dB}$, alltså försumbar skillnad!

7. a) $v(x,t) = 0.096 \cdot e^{i(\omega t - kx + \pi/2)} \text{ m/s}$

b) $p(x,t) = 38.9 \cdot e^{i(\omega t - kx + \pi/2)} \text{ Pa}$

c) $L_p = 123 \text{ dB}$

d) $\bar{I} = 1.87 \text{ W/m}^2$

e) $\bar{\Pi} = 18.7 \text{ mW}$

8. a) $\sigma(x,t) = -509 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \text{ kPa}$

b) $\varepsilon(x,t) = -2.55 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \mu\text{strain}$

c) $u(x,t) = 0.645 \cdot e^{i(\omega t - kx - \pi/2)} \text{ mm}$

d) $v(x,t) = 12.9 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \text{ mm/s}$

e) $Z = 77.6 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}$