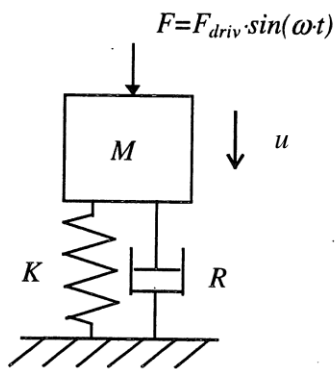


SDOF – Enfrihetsgradssystemet

Det enkla massa-fjäders-systemet, eller sdoF-systemet (single degree of freedom, enfrihetsgradssystem) är ett grundläggande begrepp inom akustik och mekanik. Med god förståelse för detta har man ett värdefullt verktyg för att analysera resonanta system. Man kan till exempel se en plattas svängningsformer, moder, som sdoF-system. I enkla fall ser man dessa som enskilda system som eventuellt är kopplade till varandra, mdof-system (multi degree of freedom, flerfrihetsgradssystem). SDOF-system är också viktigt för att förstå hur vibrationsisolering fungerar.

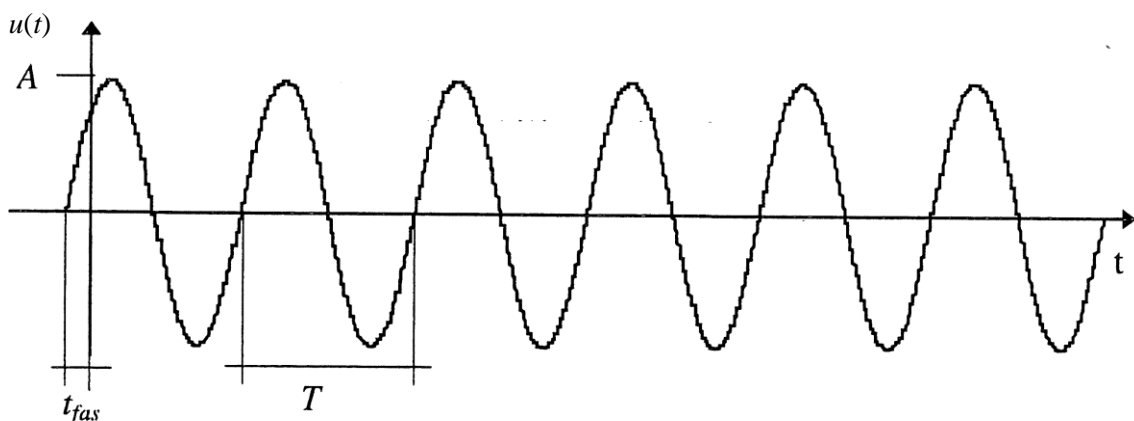


Figur 1 SDOF, enkelfrihetsgradssystem

Vi ska i detta kapitel härleda och lösa ekvationerna för det enkla massa-fjädersystemet, samt introducera vissa begrepp som vi kommer att behöva längre fram i kursen.

Inledande samband

Innan vi börjar ska vi behandla några få grundläggande samband när det gäller harmoniska funktioner. Vi tänker oss ett godtyckligt harmoniskt tidsförlopp.



Figur 2 Harmoniskt tidsförlopp

I Figur 2 ser vi tidsförloppet, där T är periodtid, A är amplitud, $u(t)$ är någon variabel, exempelvis förskjutningen som funktion av tiden, och t_{fas} är en fastid. Matematiskt kan man skriva tidsförloppet som:

$$u(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \alpha\right) \quad (1)$$

Fasändringen är här beskriven med en fasvinkel α . En enkel jämförelse mellan fastiden t_{fas} och fasvinkeln α ger att

$$\alpha = t_{fas} \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

Om vi istället för periodtid introducerar frekvens f , enhet $1/s = \text{Hz}$, så att:

$$f = \frac{1}{T} \quad (3)$$

så kan vi skriva lite lättare:

$$u(t) = A \cos(2\pi ft - \alpha) \quad (4)$$

Vanligen introducerar man även en vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$, ("omega") med enheten rad/s. Då har vi:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) \quad (5)$$

Istället för en cosinusfunktion kan tidsförloppet beskrivas med en sinusfunktion:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) = A \sin(\omega t - \alpha + \pi/2) = A \sin(\omega t - \beta) \quad (6)$$

där β är en ny fasvinkel, förskjuten 90° från α . Man kan också beskriva tidsförloppet med både en sinus och en cosinus:

$$u(t) = A \cos(\omega t - \alpha) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) \quad (7)$$

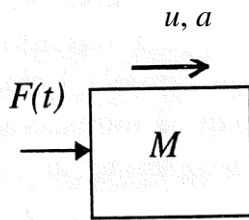
Nu börjar vi med det enkla svängningssystemet.

Ekvation i tidsled

Diskreta komponenter

Från Byggnadsmekanikens avsnitt om dynamik (kap 14 i Introduktion till strukturmekaniken) har vi stött på sdof-systemets tre olika komponenter, massa, fjäder och dämpare.

1. Massa



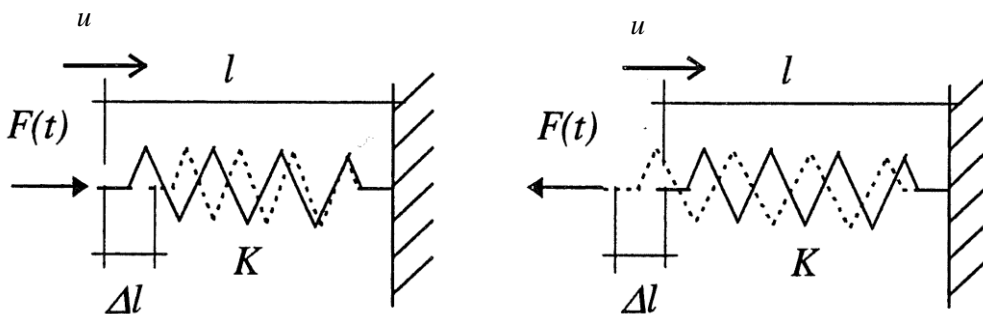
Figur 3 Massan

För en stel kropp med massa M gäller enligt Newtons röreslelag att $F = M \cdot a$, där F är en pålagd kraft och a är stelkroppens acceleration:

$$a(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \ddot{u}(t) \quad (8)$$

Stelkroppen har samma förskjutning i alla punkter, och om vi tänker oss förskjutningar i endast en dimension kan den därför representeras med en frihetsgrad¹. Massan är således en punktmassa.

2. Fjäder



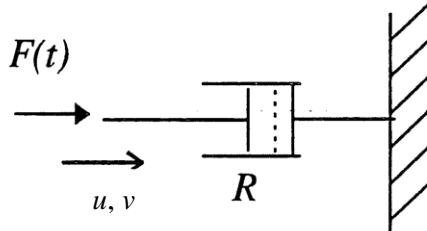
Figur 4 Fjädern

En deformation Δl av en ideal (linjär och masslös) fjäder, med längden l (i viloläge) och fjäderkonstant K , svarar mot en kraft $F = K \Delta l$, proportionellt mot fjäderns deformation. Då vi i detta första exempel

¹ Frihetsgraden representeras av förskjutningen u , vilket skall betecknas som en förskjutning runt en jämviktspunkt (eller arbetspunkt). Vi använder inte beteckningen x eller x_1 då vi behöver denna beteckning som koordinat längre fram när vi diskuterar vågutbredning

ännu bara har en frihetsgrad, belägen vid massan, kan deformationen beskrivas av förskjutningen vid denna frihetsgrad, och därmed är kraften proportionell mot förskjutningen, $F = K u$.

3. Dämpare



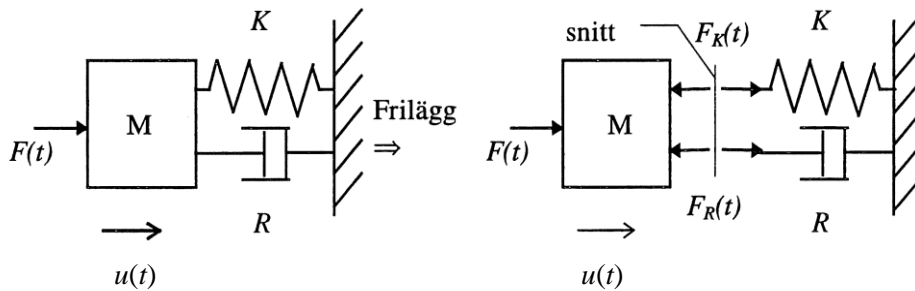
Figur 6. Dämparen

En ideal dämpare, med dämpkonstanten R , svarar mot en kraft $F = R \Delta v$ om den trycks samman eller sträcks ut med en deformationshastighet Δv (deformationshastighet relativt väggen). Om vi har en frihetsgrad så gäller på samma sätt som innan att $F = R v$

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) \quad (9)$$

Newtons rörelselag

Vi kan nu kombinera de tre elementen till ett massa-fjäder system. För att till en början slippa tyngdkraften² låter vi svängande systemet vibrera, eller svänga, horisontellt. Vidare är systemet påverkat av en yttre drivande kraft $F(t)$.



Figur 5 Friläggning av massan

I varje ögonblick måste Newtons rörelselag vara uppfyllt, d v s:

$$(\rightarrow) \quad F(t) - F_K(t) - F_R(t) = Ma(t) \quad (10)$$

Vi sätter in uttrycken för fjäderkraften och dämpkraften enligt punkt 2 och 3 ovan:

² Denna har dock ingen betydelse, som vi kommer att se senare, tyngdkraften ger en statisk förskjutning som bara flyttar arbetspunkten.

$$F(t) - Ku(t) - Rv(t) = Ma(t) \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Ma(t) + Rv(t) + Ku(t) = F(t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (12)$$

Den sist använda formen av uttrycket är vanligt förekommande, och är praktisk då förskjutningen u är den obekanta variabeln.

Lösning

Den allmänna lösning av ekvationen ovan har getts exempelvis i boken *Analys i en variabel* och består av en homogen lösning och en partikulär lösning. Den homogena lösningen består av en exponentiellt avklingande harmonisk svängning³, medan partikulärlösningen består av en harmonisk svängning med samma frekvens som drivningen, men eventuellt fasförskjutet till denna. Det finns några olika ekvivalenta begrepp för de båda lösningarna:

Partikulär	Homogen
Tvungen, driven	Fri
Steady state	Transient

Tabell 1 Ekvivalenta namn

För tydlighetens skull visar vi hur man tar fram dessa lösningar även här.

Homogen lösning:

$$M\ddot{u}_h(t) + R\dot{u}_h(t) + Ku_h(t) = 0 \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ddot{u}_h(t) + \frac{R}{M}\dot{u}_h(t) + \frac{K}{M}u_h(t) = 0 \quad (14)$$

Vi introducerar nu några hjälpstorheter:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (15)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (16)$$

³ Man kan som ett exempel tänka sig att man släpper dörrarna i V-husets foajé från öppet utgångsläge. Dörrarna kommer då att svänga fram och tillbaka några gånger tills rörelsen har dött ut.

$$\eta = \frac{R}{\sqrt{MK}} = 2\zeta \quad (17)$$

där ω_0 är den odämpade egenfrekvensen (egentligen *egenvinkelfrekvensen* med enheten rad/s), f_0 är den odämpade egenfrekvensen (med enheten Hz), η ("åta") är en dimensionslös dämpkonstant, likaså ζ ("stigma") vilket gör att vi kan skriva om ekvation 14:

$$\ddot{u}_h(t) + \eta\omega_0\dot{u}_h(t) + \omega_0^2 u_h(t) = 0 \quad (18)$$

Den karakteristiska ekvationen till ekvation 18 ges av:

$$r^2 + \eta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (19)$$

$\eta < 2$ medför att

$$r = -\frac{\eta}{2}\omega_0 \pm i\omega_0 \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2}}_{\omega_d} = -\frac{\eta}{2}\omega_0 \pm i\omega_d \quad (20)$$

Här är ω_d den dämpade resonansfrekvensen. Lösningen till den homogena ekvationen är då:

$$u_h(t) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t)) \quad (21)$$

där A_1 , A_2 , B_1 och B_2 är konstanter som bestäms med hjälp av begynnelsevillkor. Den sista likheten fås med Eulers formler (se ekvation 30-32).

Partikulärlösningen, som visar förskjutningen vid påverkan av drivande kraft, skall nu bestämmas. Angreppssättet är att ansätta en förskjutning som liknar kraften, beräkna de två derivatorna, och sedan sätta in dessa uttryck i ekvationen och lösa ut de obekanta koefficienterna. Om den drivande kraften är en harmonisk kraft med vinkelfrekvensen ω och $F(t) = F_{driv} \cos(\omega t)$, så ansätt

$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t) \quad (22)$$

\Rightarrow

$$\dot{u}_p(t) = D_1 \omega \cos(\omega t) - D_2 \omega \sin(\omega t) \quad (23)$$

$$\ddot{u}_p(t) = -D_1 \omega^2 \sin(\omega t) - D_2 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (24)$$

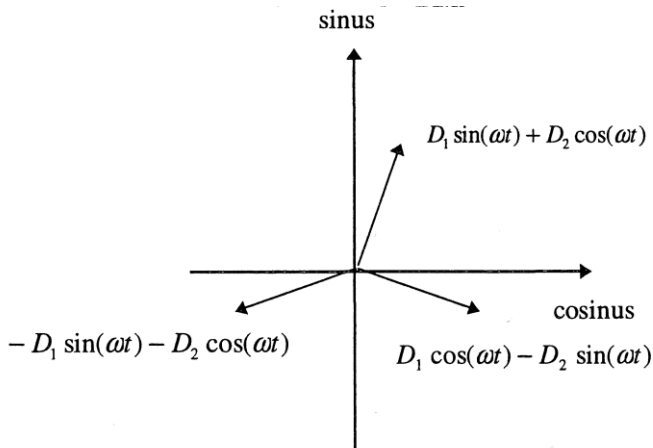
Insättning i ekvation 12 ger:

$$M\ddot{u}_p(t) + R\dot{u}_p(t) + Ku_p(t) = F_{driv} \cos(\omega t) \quad (25)$$

⇔

$$\begin{aligned}
 & -M\omega^2(D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)) + R\omega(D_1 \cos(\omega t) - D_2 \sin(\omega t)) + \\
 & + K(D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)) = F_{driv} \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{26}$$

Vi ska nu lösa ut konstanterna D_1 och D_2 . Vi har i högerledet en ensam cosinusterm, medan i vänsterledet har vi både sinus- och cosinusterm. Konstanterna måste nu väljas så att detta går ihop vid alla tidpunkter. Om vi ser sinustermerna som en koordinat och cosinustermerna som en annan koordinat, så kan vi tänka oss att följande tvådimensionella vektordiagram beskriver problemet.



Figur 6 Visare

Vi kan nu ställa upp ett ekvationssystem med två ekvationer (två obekanta), en för sinustermerna och en för cosinustermerna:

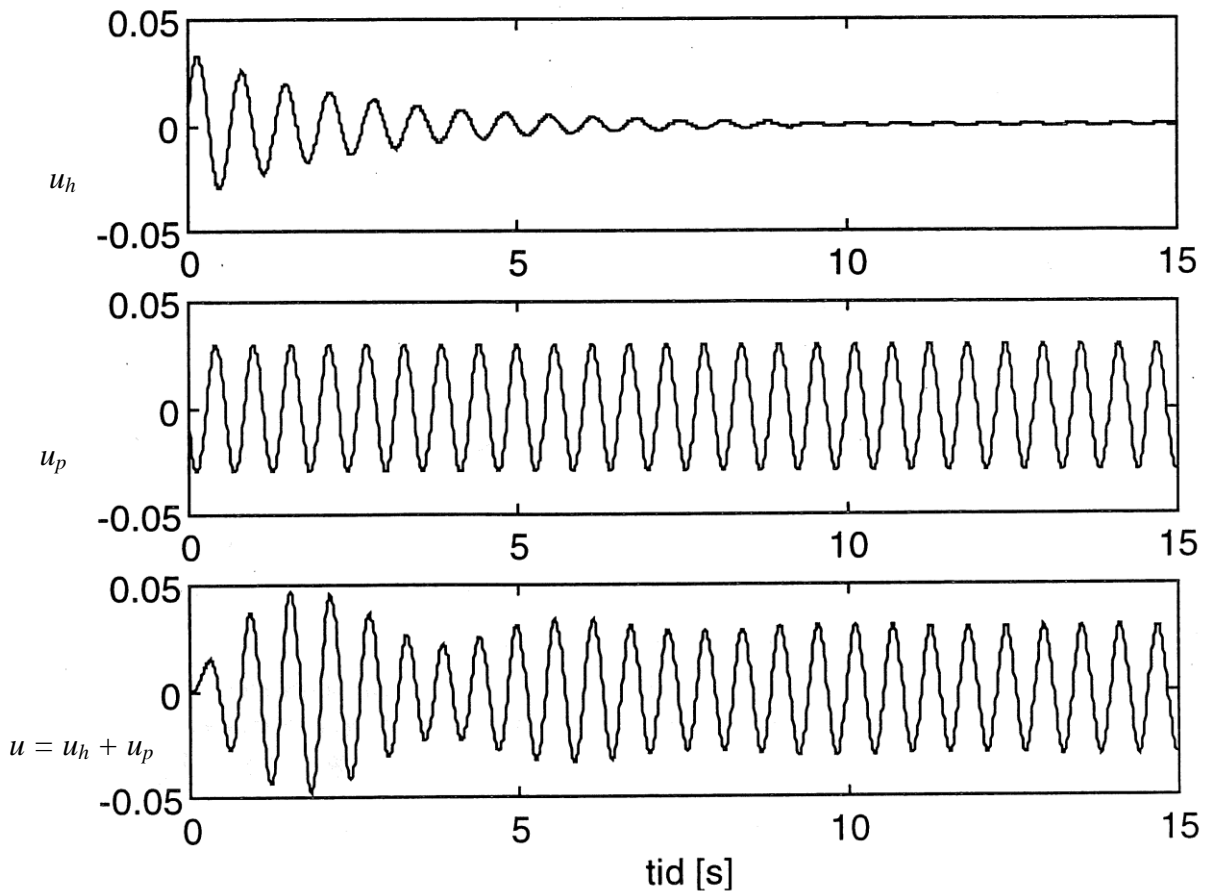
$$\begin{cases}
 -M\omega^2 D_1 - R\omega D_2 + K D_1 = 0 \\
 -M\omega^2 D_2 + R\omega D_1 + K D_2 = F_{driv}
 \end{cases} \tag{27}$$

Om man löser ut D_1 och D_2 , så har vi partikulärlösningen

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{R\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \\
 D_2 &= \frac{K - M\omega^2}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv}
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t)$$

Om man inför $\omega_0^2 = K/M$ ser man att $K - M\omega^2 = M(\omega_0^2 - \omega^2)$, vilken försvinner vid resonans ($\omega \rightarrow \omega_0$), vilket vi ska återkomma till. Den totala lösningen ges av $u(t) = u_p(t) + u_h(t)$. Som ett exempel visar vi tidshistorien för $u_h(t)$, $u_p(t)$ och $u(t)$ för ett fall ($M = 5000$ kg, $R = 3750$ Ns/m, $K = 4.44 \cdot 10^5$ N/m, $F(t) = F_{driv} \sin(\omega t)$, $\omega = 11$ rad/s och $F_{driv} = 5000$ N, och begynnelsevillkoren $u(0) = 0$, $v(0) = 0$).



Figur 7 Homogen, partikulär och total lösning

Efter en viss tid, steady state, har den homogena lösningen klingat av. Då är $u(t) \approx u_p(t)$. I akustiska sammanhang är det därför oftast $u_p(t)$ som är av intresse. De maskiner som vibrerar och fläktar som går genererar ofta monotona ljudbilder där partikulärlösningen är dominerande över den homogena lösningen. Det är därför vanligt att man endast betraktar partikulärlösningen av problemet, och så kommer vi att (till största delen) göra i fortsättningen. Men då behöver vi en bättre metod för att lösa dessa ekvationer.

Komplex amplitud

Övergång till frekvensled

För att komma vidare behöver vi en ny ansats för att få partikulärlösningen (i fortsättningen bortser vi alltså från den homogena lösningen, så vi skriver inte ut index p). Vi har sedan tidigare att lösa:

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) \quad (29)$$

Vi kommer att göra en ansats med komplexa tal, och nu har vi kraften⁴

$F(t) = F_{driv} \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\{F_{driv} e^{i\omega t}\}$ enligt Eulers ekvationer, som lyder:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad (30)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \quad (31)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{i}{2}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \quad (32)$$

Till ansats söker vi nu en funktion som liknar kraften. Vi vill då ha realdelen av en funktion som består av en harmonisk term, $e^{i\omega t}$, och en amplitud framför den harmoniska termen. Denna amplitudfunktion kan generellt sett vara en funktion av frekvensen (vinkelfrekvensen) och dessutom komplex. Det är denna nya funktion som vi kallar komplex amplitud, och betecknar med $\tilde{u}(\omega)$, där vågtecknet indikerar att det är en ny funktion, vidare är den en funktion av ω . Vi gör alltså följande ansats, och deriverar:

Ansätt:

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (33)$$

\Rightarrow

$$\dot{u}(t) = \operatorname{Re}\{i\omega \cdot \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (34)$$

$$\ddot{u}(t) = \operatorname{Re}\{-\omega^2 \cdot \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} \quad (35)$$

Insatt i ekvation 12 ger detta:

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F_{driv} \cos(\omega t) \quad (36)$$

\Leftrightarrow

$$M \operatorname{Re}\{-\omega^2 \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} + R \operatorname{Re}\{i\omega \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} + K \operatorname{Re}\{\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{F_{driv} \cdot e^{i\omega t}\} \quad (37)$$

Realdelsoperatoren $\operatorname{Re}\{\}$ verkar på alla termer, och kan därför lyftas ut:

$$\operatorname{Re}\{-M\omega^2 \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + Ri\omega \tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + K\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{F_{driv} \cdot e^{i\omega t}\} \quad (38)$$

\Rightarrow

⁴ Det bör påpekas att det även är möjligt att välja imaginärdelen, vilket motsvarar att kraften är en sinus istället för en cosinus, eller med andra ord en fasskillnad på 90°. I akustiken väljer man ofta realdelen eftersom det ofta känns naturligare att ta realdelen av det komplexa resultatet för att kunna göra en fysikalisk tolkning.

$$-M\omega^2\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + Ri\omega\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} + K\tilde{u}(\omega) \cdot e^{i\omega t} = F_{driv} \cdot e^{i\omega t} \quad (39)$$

Vidare ingår den harmoniska⁵ termen $e^{i\omega t}$ i alla uttryck och kan därmed förkortas bort:

$$-M\omega^2\tilde{u}(\omega) + Ri\omega\tilde{u}(\omega) + K\tilde{u}(\omega) = F_{driv} \quad (40)$$

⇔

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (41)$$

Om man inför $\omega_0^2 = K/M$ ser man att $K - M\omega^2 = M(\omega_0^2 - \omega^2)$, vilken försvinner vid resonans ($\omega \rightarrow \omega_0$), och $\tilde{u}(\omega)$ blir då mycket stor.

Med hjälp av ansatsen, väsentligen $e^{i\omega t}$, så har differentialekvationen av andra ordningen blivit en vanlig andragradsekvation med avseende på $\tilde{u}(\omega)$. Det lösta uttrycket $\tilde{u}(\omega)$ som vi kan kalla komplex förskjutningsamplitud eller förskjutningsspektra, innehåller väsentligen all systeminformation som man kan behöva. Vågtecknet över den komplexa amplituden indikerar att vi har en ny funktion, och denna är komplex och är inte längre en funktion av tiden, medan ω betyder att funktionen är en funktion av vinkelfrekvensen⁶. Vi kan också se det som om vi har gjort en sorts transform från tidsfunktioner till komplexa frekvensfunktioner. En mer allmän övergång från tidsfunktioner till frekvensfunktioner får man med Fouriertransformen. Med Fouriertransformen kan man behandla godtyckliga tidsförlopp, inte bara steady state som vi gör här. Det visar sig dock att när man väl dividerar bort drivningen, vilket vi strax ska göra, så blir resultatet detsamma. Den enklaste ansatsen ger alltså inte bara ett enkelt resultat, utan även ett helt generellt resultat, oberoende av drivningen.

Om vi vill kan vi nu återgå till tidsfunktionen (tidsplanet) med hjälp av ansatsen:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \\ &= \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2} \operatorname{Re} \left\{ (K - M \cdot \omega^2 - R \cdot i\omega) \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \right\} = \\ &= \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2} \left((K - M \cdot \omega^2) \cos(\omega t) + R\omega \sin(\omega t) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Denna lösning är densamma som i ekvation 28.

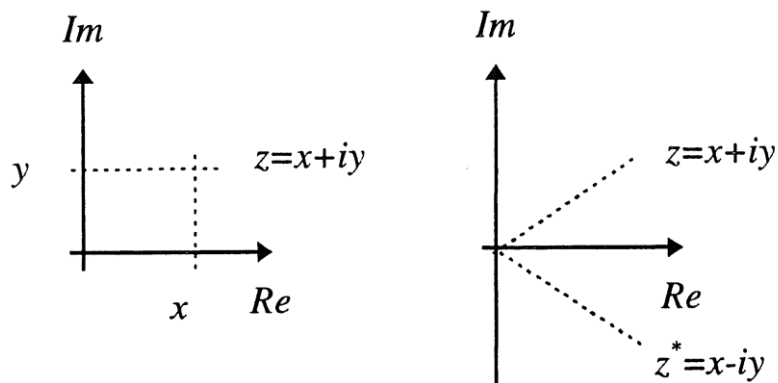
⁵ Med harmoniska funktioner, eller harmoniska förlopp, menas $\sin(\omega t)$ och $\cos(\omega t)$, som har fördelen att vara varandras derivata, samt $e^{i\omega t}$, som är sin egen derivata. Den senare kan också kallas komplex harmonisk. De harmoniska förloppen låter som rena toner. I musikinläran har dock harmonisk en vidare definition

⁶ $\omega = 2\pi f$ [rad/s] vinkelfrekvensen, $f = 1/T$ [Hz = 1/s] frekvens, T [s] periodtid, allt gäller för drivningen.

Oftast nöjer man sig dock med att betrakta systemet i frekvensplanet. Även om vi har sett att den harmoniska (transienta) lösningen inte spelar någon roll i det långa loppet, så kan man tycka att vi har gjort en allvarlig begränsning av teorin då vi endast ser på partikulärlösningen till harmoniska funktioner (sinussvängningar). Så är dock inte fallet. Inom akustiken utnyttjar man ofta det faktum att varje tidsvarierande funktion, med hjälp av Fouriertransform eller Fourierserier, kan beskrivas som en summa av enkla sinusfunktioner med olika frekvens, amplitud och fas. Det betyder att en godtycklig pålagd kraft $F(t)$ kan ersättas med ett, ofta stort, antal enkla sinusfunktioner. Så istället för att försöka hitta en ny lösning till differentialekvationen (ekvation 12) för varje ny kraft, så löser man den, som vi nu har gjort, för varje harmonisk funktion. Den aktuella kraftens spektrum, vilket fås med Fouriertransformen, kan sedan läggas till. Detta behandlas närmare i området som kallas linjära system.

Komplex räkning

Vi utnyttjade härvid några räkneregler för komplexa tal, och det kan vara på sin plats att återge dessa:



Figur 8 Komplexa tal

- Imaginära enheten:

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \dots \quad i^{-1} = -i \quad (43)$$

- Komplexa tal:

$$z = x + iy \quad (44)$$

- Addition:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (45)$$

- Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2) \quad (46)$$

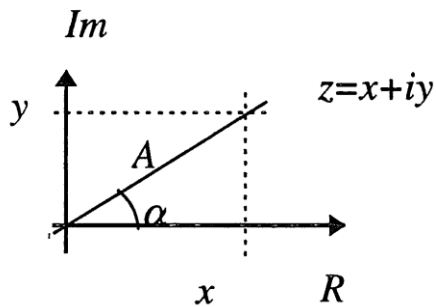
- Komplext konjugat:

$$z^* = x - iy \quad (47)$$

- Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (48)$$

Amplitud och fasvinkel är viktiga begrepp:



Figur 9 Amplitud och fas

- Amplitud (eller absolutbelopp):

$$A = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (49)$$

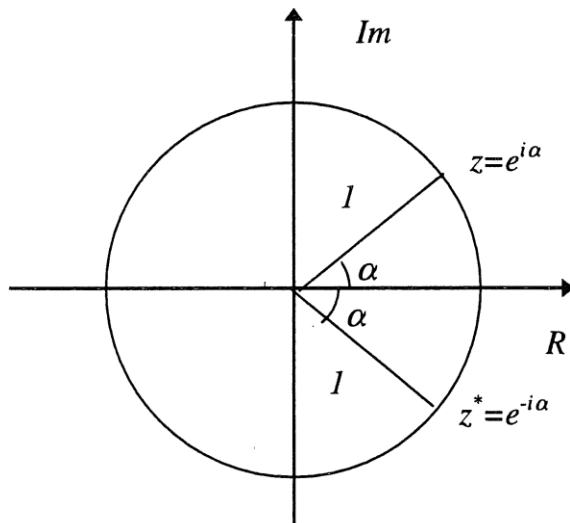
- Fas (alltid i radianer!):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (50)$$

Ur figur Figur 9 kan man då se att:

$$x = A \cos(\alpha), \quad y = A \sin(\alpha) \quad (51)$$

Med hjälp av Eulers former, ekvation 30-32, och enhetscirkeln så har vi vidare:



Figur 10 Enhetscirkeln

$$z = x + iy = Ae^{i\alpha} = A(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \quad (52)$$

$$z_1 \cdot z_2 = A_1 A_2 e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (53)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (54)$$

Överföringsfunktioner

Vi återgår nu till att titta på resultatet av de komplexa räkningarna, ekvation 41 gav den komplexa förskjutningsamplituden, vilken beror på storleken av den pålagda kraften

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (55)$$

Ofta vill man betrakta systemen, i detta fall vårt massa-fjäder-system, utan att man ser de yttre förhållandena, såsom i detta fall kraften (vilken kan vara en funktion av frekvensen). Om vi normerar förskjutningen med avseende på den drivande kraften, så får vi ett uttryck som bara beror av systemets storheter M , R och K , samt vinkelfrekvensen. Man har då kvar en komplex kvot

$$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{F_{driv}(\omega)} = \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (56)$$

Vi kan kalla denna kvot för systemets dynamiska vekhet, då en stor kvot (vekhet) ger en stor förskjutning för en liten kraft. Den omvända kvoten kan vi kalla dynamisk styvhet

$$K_{dyn}(\omega) = \frac{F_{driv}(\omega)}{\tilde{u}(\omega)} = -M \cdot \omega^2 + R \cdot i\omega + K \quad (57)$$

Allmänt brukar man kalla kvoter mellan komplexa amplituder (spektra), i samma punkt eller i en annan punkt i ett visst system för överföringsfunktion $H(\omega)$ om de är kvoter mellan utsignal och insignal.

$$H_{ij}(\omega) = \frac{\tilde{s}_i(\omega)}{\tilde{s}_i(\omega)} = \frac{\text{utsignal}}{\text{insignal}} \quad (58)$$

Med signal menas i detta fall de båda variabla termerna i ett uttryck, i vårt fall är kraften insignal medan förskjutningen är utsignal. Övriga parametrar, massa, fjäder och dämpare, tillhör systemet. Signalbegreppet antyder att de båda variablerna är mätbara, och att man kan bestämma systemets egenskaper genom att mäta dessa signaler. Den dynamiska styvheten, K_{dyn} , är i detta fall tydligen inte en överföringsfunktion, då den är en kvot mellan insignal och utsignal och inte tvärt om. Den dynamiska vekheten, C_{dyn} , är däremot en äkta överföringsfunktion.

Det är också möjligt att definiera andra överföringsfunktioner som utgår från massans hastighet eller acceleration. Detta illustreras i tabell 2 nedan tillsammans med benämningen av respektive överföringsfunktion. Av dessa kommer framförallt impedansen att diskuteras framöver.

Förskjutning u	Hastighet v	Acceleration a
$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$	$Y(\omega) = \frac{\tilde{v}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$	$N(\omega) = \frac{\tilde{a}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$
Dynamisk vekhet	Mekanisk admittans	Mekanisk accelerans
$K_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{u}(\omega)}$	$Z(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{v}(\omega)}$	$M_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\tilde{a}(\omega)}$
Dynamisk styvhet	Mekanisk impedans	Dynamisk massa

Tabell 2 Kvoter i frekvensplanet

Har man en överföringsfunktion så tar man enkelt fram de övriga, t ex genom att använda att $\tilde{v}(\omega) = i\omega \cdot \tilde{u}(\omega)$, se ekvation 33-35.

Man bör komma ihåg att överföringsfunktioner endast gäller för linjära system, det vill säga när spektrumet är oberoende av amplituden. I sådana system överförs således en ren ton (sinusfrekvens) oberoende av alla andra befintliga toner. Detta är en stor förenkling som inte gäller om man arbetar med tidsfunktioner, då störningar i olika tidpunkter påverkar varandra. Vidare betyder detta att överföringsfunktioner experimentellt kan bestämmas antingen genom att man sakta sveper med kraftens frekvens (sinussvep) eller genom att man sänder in en signal som innehåller alla sökta frekvenser på en gång. En sådan signal kallas brus, och om den kvadrerade signalens amplitud är konstant för samtliga frekvenser kallas det vitt brus.

Att representera dessa komplexa dynamiska kvoter grafiskt kan man göra på olika sätt. Det vanligaste alternativet är att tänka sig uttrycket på formen $C_{dyn} = Ae^{i\alpha}$, där A är amplituden och α fasen.

$$A = |C_{dyn}(\omega)| = \left| \frac{\tilde{u}(\omega)}{F_{driv}(\omega)} \right| = \left| \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(K - M \cdot \omega^2)^2 + (R\omega)^2}} \quad (59)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\text{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}} \right) = \arctan \left(\frac{-R\omega}{K - M \cdot \omega^2} \right) \quad (60)$$

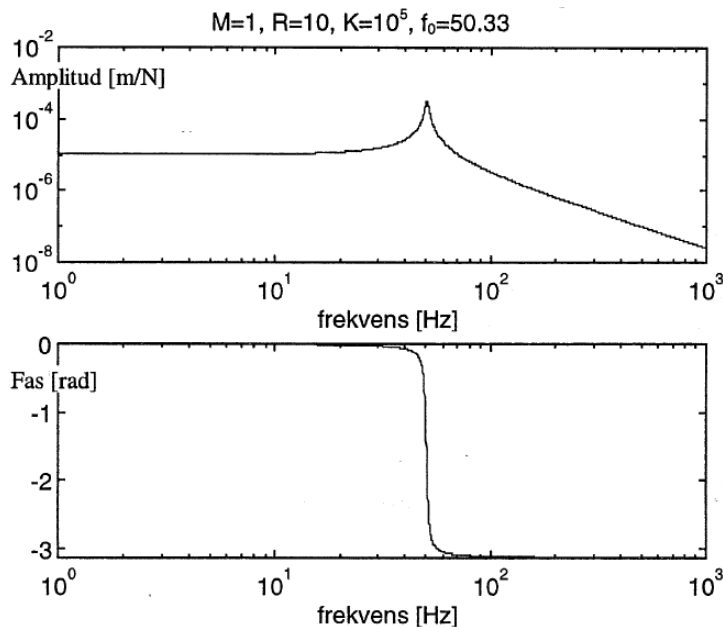
Vid det odämpade systemets resonans, $\omega_0 = (K/M)^{1/2}$, har amplituden (nästan) ett maximum och fasen är $\pi/2$, det vill säga 90° efter drivningen.

$$\omega \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (61)$$

$$A = |C_{dyn}(\omega_0)| = \frac{1}{R\omega_0} \quad (62)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (63)$$

Det är vanligt att man använder logaritmisk skala på axlarna. Denna representation som illustreras i Figur 11 kallas Bode-diagram.



Figur 11 Bode-diagram för överföringsfunktionens amplitud och fas

För frekvenser under resonansfrekvensen ($\omega > \omega_0$) så dominerar fjäderstyvheten, amplituden är horisontell och fasan är noll. Om vi sedan ökar frekvensen tills vi närmar oss resonans ($\omega = \omega_0$) så tar bidragen från fjädertermen och masstermen ut varandra och vi får resonans där amplituden bestäms av dämpningen. Över resonans ($\omega < \omega_0$) dominerar bidraget från masstermen, amplituden lutar med konstant lutning i en log-log skala

$$\omega > \omega_0 \quad (64)$$

$$C_{dyn} = \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \approx \frac{1}{M\omega^2} \quad (65)$$

$$\log\left(\frac{1}{M\omega^2}\right) = -2\log(\omega) - \log(M) - 2\log(\pi) - \log(M) \quad (66)$$

Lutningen är således -2 dekader⁷ per dekad frekvens. Detta är ett mycket viktigt praktiskt resultat, som därför har fått ett eget namn, *masslagen*. Det betyder att över resonansen kommer förskjutningen minska mycket snabbt med ökande frekvens, $\tilde{u}(\omega) \propto \omega^{-2}$ (tecknet \propto betyder ”proportionell mot”). Vi

⁷ En dekad är detsamma som en tiopotens.

kan också se att det finns en punkt över resonans där förskjutningen är lika stor som den statiska förskjutningen, och över denna punkt kommer förskjutningen att vara mindre än den statiska. Detta faktum utnyttjas vid vibrationsisolering.

Om vi tittar på fasdiagrammet så ser vi att fasen är noll vid riktigt låga frekvenser, det vill säga förskjutningen har samma fas som drivningen. Vid resonans är fasen $-\pi/2$, alltså ligger förskjutningen 90° efter drivningen. Över resonans närmar sig fasen $-\pi$, vilket betyder att förskjutningen är i motfas mot drivningen, förskjutningen ligger 180° efter drivningen.

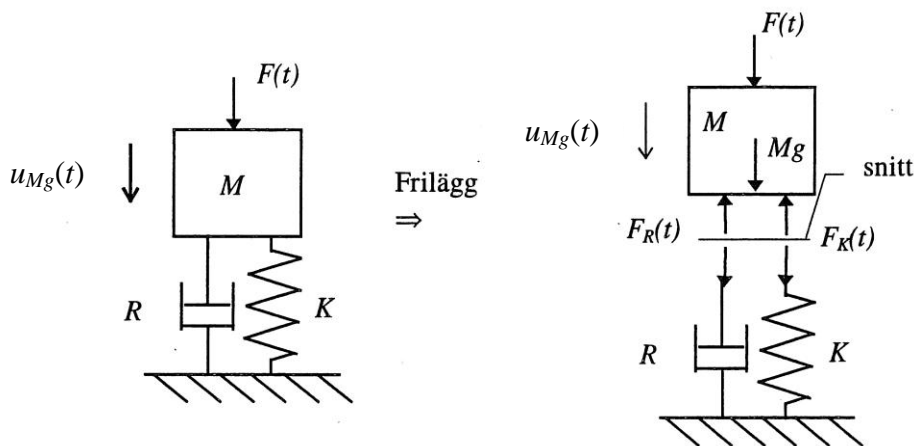
Detta förhållande kan lätt kontrolleras experimentellt med en vikt och en gummisnodd. Fäst vikten i gummisnodden, som du fäster i ett finger, så att du får ett massa-fjäders-system. För du handen långsamt upp och ner, så följer vikten med handen. Ökar du frekvensen tills du kommer till resonans, där vibrationen är som störst, så ligger förskjutningen hos massan 90° efter handen. Ökar du frekvensen ännu mer så kommer handen och massan att röra sig i motfas.

Resonatorer

I detta avsnitt ska vi titta lite närmare på några resonanta system som kan beskrivas med det enkla massa-fjädersystemet. Vi börjar med att vända på massa-fjädersystemet, så att vi får med tyngdkraften. Vi ska visa att detta inte spelar någon roll.

Tyngdkraften

Vi vänder nu alltså på massa-fjädersystemet:



Figur 12 Stående resonatorer

Som vanligt måste Newtons rörelselag gälla i varje ögonblick

$$\left(\downarrow\right) F(t) - F_K - F_R + Mg = Ma(t) \quad (67)$$

Vi för in uttrycken för fjäderkraften och dämpkraften, det vill säga $F_K(t) = K u(t)$ och $F_R(t) = R v(t)$

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) + Mg \quad (68)$$

Vi ser att vi har en differentialekvation där ”drivningen” består av en harmonisk kraft $F(t)$ och en statisk kraft Mg . Till partikulärlösningen, vilken är den vi i första hand är intresserade av, ansätter vi då att förskjutningen består av en harmonisk del och en statisk del, $u_{tot}(t) = u(t) + u_s(t)$, där den statiska fås av den sättning som massan statiskt orsakar:

$$u_s = \text{konstant} \Rightarrow \dot{u}_s = 0 \quad \text{och} \quad \ddot{u}_s = 0 \quad (69)$$

$$0 + 0 + Ku_s = 0 + Mg \Rightarrow u_s = \frac{Mg}{K} \quad (70)$$

Den harmoniska delen fås på samma sätt genom att bara lösa ekvationen för den harmoniska kraften:

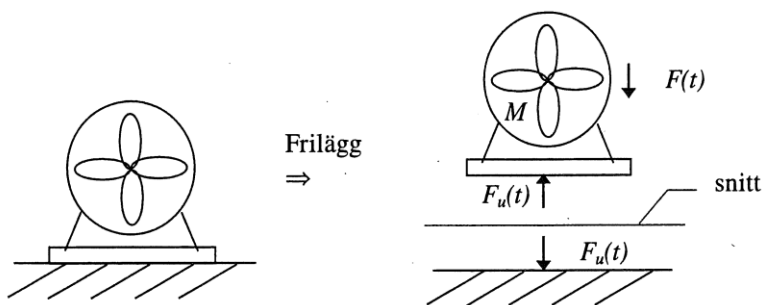
$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t) + 0 \quad (71)$$

Men då detta precis är den ekvation som vi har ägnat oss åt hittills, så kan vi anse att dess lösning är given. Tyngdkraften ger tydligen en statisk förskjutning som bara flyttar arbetspunkten. Om fjädern är olinjär i vissa områden kan dock vissa arbetspunkter vara att föredra. Så är dock inte fallet här, så man kan bortse från tyngdkraften i vibrationsberäkningar.

Vibrationsisolering

Som ett första exempel på ett enkelt massa-fjädersystem i en applikation ska vi nu titta på vibrationsisolering. Vi kan tänka oss att ett industriföretag har bett oss lösa ett vibrationsproblem som de har. En roterande maskin med viss excentricitet står fastskruvad på ett styvt bjälklag, vilket orsakar vibrationer i bjälklaget som vidare ger buller och vibrationskador. Fabrikören i fråga ber oss, som konsulter, minska problemet. Vad ska vi göra? Vi börjar med att anta att underlaget är orörligt, det vill säga att maskinen är fast inspänd. Detta är en förenkling som i allmänhet inte är helt giltig, men för tjocka betongbjälklag, 250-300 mm, är antagandet oftast rimligt. För lätta träbjälklag är emellertid antagandet tveksamt.

Vi frilägger nu maskinen:



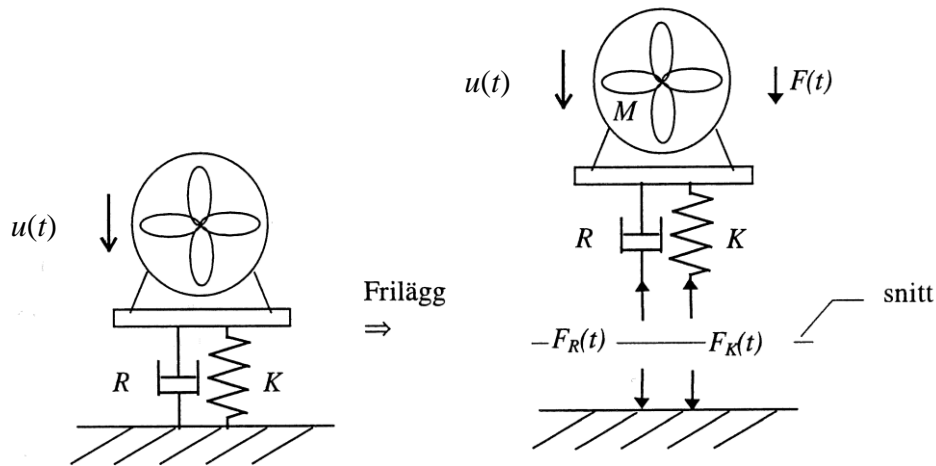
Figur 13 Friläggning av maskin innan åtgärd

Rörelselagen ger nu, då vi inte har någon förskjutning eller acceleration (fläktens ram och hölje antas stå still):

$$(\downarrow)F(t) - F_u(t) = 0 \quad (72)$$

Vi ser att den kraft som orsakas av maskinens excentricitet $F(t)$ går rakt ner i bjälklaget, $F_u(t) = F(t)$, där index u står för *utan* vibrationsisolering. Om vi ansätter harmoniska störningar,

$F(t) = \text{Re}\{\tilde{F}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\}$ och som innan bortser från realdelsoperatoren och den harmoniska termen, som är gemensam för alla termer, så kan vi skriva $\tilde{F}(\omega) = \tilde{F}_u(\omega)$. Vi tänker oss nu att vi sätter maskinen på gummiklossar eller stålfjädrar. Vi tänker oss vidare att dämpning kan ingå i fjädrarna. Om vi använder fyra fjädrar blir den sammanlagda fjäderstyvheten $K = \Sigma K_i$. Detsamma gäller för dämpningen.



Figur 14 Friläggning av maskin efter åtgärd

Rörelselagen måste som vanligt råda:

$$\left(\downarrow\right) F(t) - F_K(t) - F_R(t) = Ma(t) \quad (73)$$

Detta är samma ekvation som vi har behandlat tidigare. Vi är intresserade av partikulärlösningen, och lösningen gavs i ekvation 41. Förskjutningen, beskrivet i frekvensplanet, blev:

$$-M\omega^2\tilde{u}(\omega) + Ri\omega\tilde{u}(\omega) + K\tilde{u}(\omega) = F_{driv}(\omega) \quad (74)$$

\Leftrightarrow

$$\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (75)$$

Men nu är vi primärt intresserade av kraften som går ner i bjälklaget när vi har lagt till fjädern och dämparen, och vi vet att kraften mot underlaget kan beskrivas som summan av kraften från fjädern och kraften från dämparen, $F_m(t) = F_K(t) + F_R(t)$, där index m står för *med* vibrationsisolering. I frekvensplanet blir detta:

$$\tilde{F}_m(\omega) = \tilde{F}_K(\omega) + \tilde{F}_R(\omega) = K\tilde{u}(\omega) + R \cdot i\omega\tilde{u}(\omega) \quad (76)$$

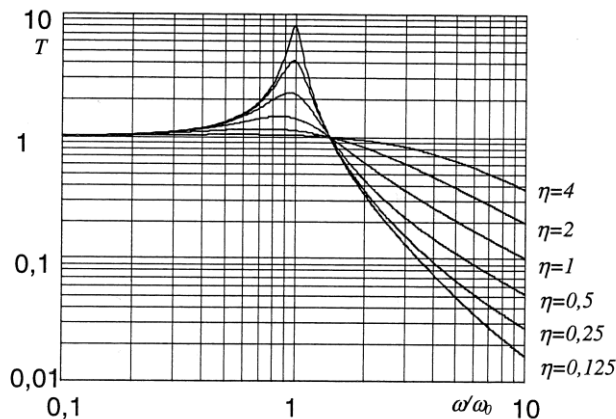
\Rightarrow

$$\frac{\tilde{F}_m(\omega)}{\tilde{F}_{driv}(\omega)} = \frac{\tilde{F}_m(\omega)}{\tilde{F}_u(\omega)} = \frac{K + R \cdot i\omega}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} \quad (77)$$

Vi har tydligen fått ett uttryck som ger oss kvoten mellan kraften mot underlaget med vibrationsisolering mot kraften mot underlaget utan vibrationsisolering. Det viktiga i denna typ av vibrationsisoleringsproblem är att amplituden av vibrationen minskar med åtgärden. Absolutbeloppet av kvoten ovan brukar benämnas insättningsdämpning eller *insertion loss*, medan transmissionstal T ⁸ eller *transmissibility* används om det handlar om kvot mellan drivning och underlag,

$$T = \left| \frac{\tilde{F}_{driv}(\omega)}{\tilde{F}_m(\omega)} \right| \quad (78)$$

Att beräkna transmissionstalet och insättningsdämpningen lämnas som övning. Om transmissionstalet är 1 så har ingen förändring skett, och om $T < 1$ så har en förbättring skett, det vill säga en minskning av kraftens amplitud har skett, medan om $T > 1$ så känner underlaget en större amplitud än den ursprungliga, alltså en försämring. Nedan visas hur transmissionstalet kan se ut. Vi har här satt förlustfaktorn $\eta = R/\omega_0 M$, där resonansfrekvensen som vanligt är $\omega_0 = (K/M)^{1/2}$. Frekvensen är sedan normerad mot resonansfrekvensen så att resonans alltid sker vid $\omega/\omega_0 = 1$.



Figur 15 Transmissionstal, normerad frekvens och olika värden på förlustfaktorn, η

Vi kan nu se att $T > 1$ vid $\omega/\omega_0 \approx 1$, och vi får tydligen ingen förbättring med hjälp av vibrationsisoleringen runt resonansfrekvensen eller vid lägre frekvenser, $\omega/\omega_0 < 1$. Däremot får man alltid en förbättring över resonansfrekvensen. Vidare ser man att dämparen mest "smetar ut" beteendet, så att effekten vid resonans inte blir så stor.

Om vi återgår till vårt ursprungliga problem med fabrikören så löser vi det genom att ta reda på den dominerande frekvensen i den drivande kraften $F(t)$, vi kan beteckna den med ω_{maskin} , vilken troligen är den samma som rotationsfrekvensen, samt maskinens vikt M . Sedan dimensionerar vi fjäderstyvheten K så att resonansfrekvensen för systemet $\omega_0 = (K/M)^{1/2} \ll \omega_{maskin}$. Det gäller alltså att ha så vecka fjädrar som möjligt, vilket kan vara svårt i praktiken.

⁸ T står här för transmissionstal och inte för periodtid.

Viktiga formler

Enfrihetsgradssystemet med en massa, fjäder och en dämpare leder till rörelseekvationen

$$M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

Som har en total lösning som består av en homogen och en partikulär del, $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$. Den homogena lösningen är

$$u_h(t) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) = e^{-\frac{\eta}{2}\omega_0 t} (B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t))$$

där den odämpade resonansfrekvensen, dämpkonstanten och dämpade resonansfrekvensen förts in

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \eta = \frac{R}{\sqrt{MK}} = 2\zeta \quad \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{2}\right)^2}$$

och partikulärlösningen för en drivande kraft $F(t) = F_{driv} \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\{F_{driv} e^{i\omega t}\}$ är

$$u_p(t) = D_1 \sin(\omega t) + D_2 \cos(\omega t) \quad \begin{cases} D_1 = \frac{R\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \\ D_2 = \frac{K - M\omega}{(K - M\omega^2)^2 + (R\omega)^2} \cdot F_{driv} \end{cases}$$

Partikulärlösningen uttryckt på komplex form blir

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{u}(\omega) e^{i\omega t}\} = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} e^{i\omega t}$$

Tyngdkraften (om närvarande) skapar en statisk sättning med sträckan $u_s = \frac{Mg}{K}$

Dynamisk vekhet definieras som kvoten mellan komplex förskjutning och komplex kraft

$$C_{dyn}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$$

C_{dyn} kan, som andra överföringsfunktioner, åskådliggöras med ett Bodediagram där man plottar amplitud och fas

$$A = |C_{dyn}(\omega_0)| = \frac{1}{R\omega_0} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{C_{dyn}(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{C_{dyn}(\omega)\}}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

Transmissionstalet T är kvoten mellan drivande kraft och kraft som går ner i underlaget, $T = \left| \frac{\tilde{F}_{driv}(\omega)}{\tilde{F}_m(\omega)} \right|$

Uppgifter

1. Två partiklar rör sig med harmoniska rörelser. $\omega = 10\pi$

$$u_1(t) = A \cos(\omega t)$$

$$u_2(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

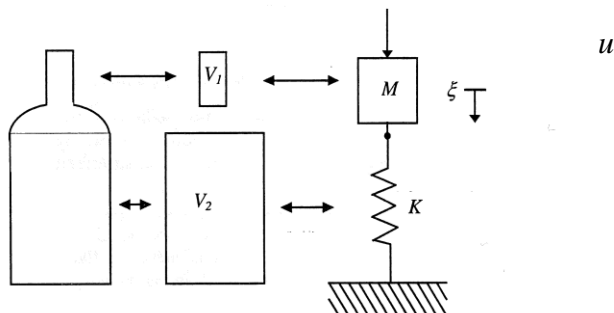
där $\varphi = \frac{\pi}{6}$

- Vad är frekvensen för de båda rörelserna?
- Vad är periodtiden?
- Den senare partikeln ligger aningen efter den första i tid, en fasskillnad. Uttryck denna i en tidsskillnad.
- Vid vilka tidpunkter har partiklarna sina maximala absoluta hastigheter och accelerationer?
- Beräkna amplituden för partiklarnas acceleration om $A = 1\text{cm}$.
- Om vi adderar signalerna, vid vilken fasskillnad φ mellan de båda kommer vi att få utsläckning? Vid vilken fasskillnad kommer de att förstärka varandra maximalt?

2. Skriv om följande komplexa tal på formen $Ae^{i\alpha}$ och bestäm A och α .

- $3+4i$
- $(3+4i)/(4+3i)$
- $1+i$
- i

3. En flaska kan ses som ett massa-fjäder-system, en Helmholtz-resonator där den lilla volymen i halsen verkar som en massa och den stora verkar som en fjäder enligt Figur 16.



Figur 16 En vanlig 33 cl ölflaska modellerad som ett SDOF-system.

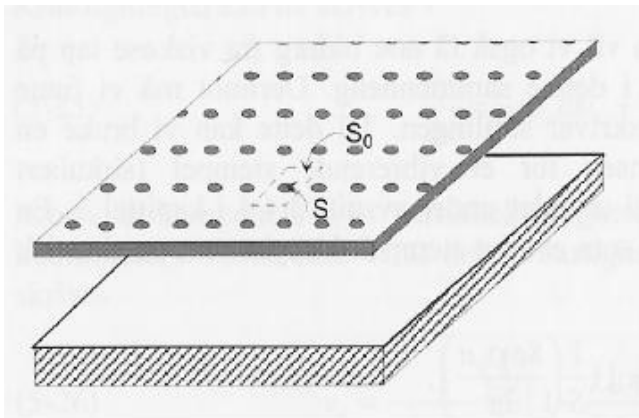
Massan M är massan för luften i flaskhalsen och styvheten K kan uttryckas som

$$K = \frac{S_1^2 P_0 \gamma}{V_2}$$

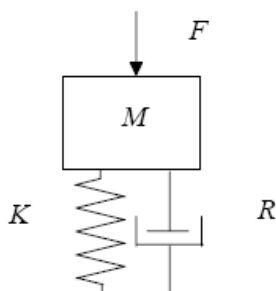
där S_1 är tvärsnittsarean för flaskhalsen och V_2 volymen för flaskans kropp. En vanlig ölflaska har följande ungefärliga dimensioner: Botten har radien $r_2 = 26$ mm och höjd $H_2 = 140$ mm. Flaskhalsen har en höjd på $H_1 = 70$ mm och en radie på $r_1 = 10$ mm. Räkna med att densiteten för luft är $\rho = 1.293$ kg/m³ och dessutom behövs $\gamma = 1.4$ för tvåatomiga gaser och atmosfärstrycket är $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Pa.

- Bestäm resonansfrekvensen för flaskan, d v s tonen man hör när man blåser på flaskhalsens kant.
- Bestäm resonansfrekvensen om det står 2 cm öl i botten av flaskan.

4. Hur långt från väggen ska man placera en 2cm tjock perforerad träpanel med $S/S_0 = 0.01$ om man ska dämpa ljud vid 100 Hz. (dvs, när hålighet + bakomliggande luftmassa fungerar som en Helmholtz-resonator)



5. Betrakta följande svängande system bestående av en massa med en fjäder och en dämpare som utsätts för en kraft $F(t)$. Följande data gäller för storheterna: $M = 1$ kg, $K = 1 \cdot 10^4$ N/m, $R = 1$ Ns/m.



Figur 17 Ett enkelt dynamiskt system

- a) Ställ upp differentialekvationen för rörelsen (förskjutningen = $u(t)$).
- b) Hur inverkar gravitationen på rörelsen?
- c) Beräkna systemets odämpade och dämpade egenfrekvens ω_0 , respektive ω_d .
- d) Bestäm den komplexa förskjutningen $\tilde{u}(\omega)$ om $F(t) = 1 \cdot \cos(\omega t) = \text{Re}\{1 \cdot e^{i\omega t}\}$.
- e) Bestäm överföringsfunktionen $\tilde{C}_{dyn}(\omega)$.
- f) Bestäm systemets mekaniska impedans $Z(\omega)$.
- g) Bestäm systemets svar, lösningen $u(t)$, för $F(t) = 0$ och begynnelsevärdena $u(0) = 0$ och $\dot{u}(0) = 1$.
- h) Bestäm systemets svar för $F(t) = 0$ och begynnelsevärdena $u(0) = 1$ och $\dot{u}(0) = 0$.
- i) Hur skulle man rent praktiskt kunna åstadkomma begynnelsevillkoren i g) och h)?
- j) Hur kommer svängningsrörelsen att ändras om man sätter $R = 0$, alltså tar bort dämpningen?

Svar

1. a) $f = 5 \text{ Hz}$
 b) $T = 0.2 \text{ s}$
 c) $t_{fas} = 16.7 \text{ ms}$
 d) v_{1max} vid $t = 0.05 + 0.1n$, där $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
 a_{1max} vid $t = 0.1n$, där $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
 v_{2max} vid $t = 0.0667 + 0.1n$, där $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
 a_{2max} vid $t = 0.0167 + 0.1n$, där $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
 e) $a_{1max} = a_{2max} = 9.87 \text{ m/s}^2$
 d) Utsläckning vid $\varphi = \pi + 2n\pi$, förstärkning vid $\varphi = 2n\pi$
2. a) $z = 5 \cdot e^{i0.927}$
 b) $z = 1 \cdot e^{i0.284}$
 c) $\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$
 d) $1 \cdot e^{i\pi/2}$
3. a) $f_0 = 205 \text{ Hz}$
 b) $f_0 = 221 \text{ Hz}$
4. $l = 15 \text{ cm}$.

5. a) $M\ddot{u}(t) + R\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$

b) Den förskjuter bara jämviktspunkten nedåt med sträckan $u_s = F/K$.

c) $\omega_0 = 100$ rad/s, $\omega_d \approx 100$ rad/s

d) $\tilde{u}(\omega) = \frac{F_{driv}}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} = \tilde{u}(\omega) = \frac{1}{(1 \cdot 10^4 - \omega^2) + i\omega}$

e) $C_{dyn}(\omega) = \frac{1}{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega} = \frac{1}{(1 \cdot 10^4 - \omega^2) + i\omega}$

f) $Z(\omega) = \frac{(K - M \cdot \omega^2) + R \cdot i\omega}{i\omega} = \frac{(1 \cdot 10^4 - \omega^2) + i\omega}{i\omega}$

g) $u(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t), \quad t > 0$

h) $u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right), \quad t > 0$

i) Begynnelsehastigheten i g) kan ges genom att tillföra en impuls till massan, t ex genom ett hammarslag. Begynnelseförskjutningen i h) kan ges genom att lyfta upp massan sträckan $u = 1$ m och sedan släppa den från vila.

j) Vid odämpad svängning kommer massan att svänga utan att förlora energi, d v s för alltid.